Trường ĐH Sư phạm Kỹ thuật Tp.HCM
KHOA KHOA HỌC ỨNG DỤNG
BỘ MÔN TOÁN

**ĐỀ THI CUỐI KỲ *HỌC KỲ III NĂM HỌC 2016-2017***
**MÔN**: ***HÀM BIẾN PHỨC VÀ PHÉP BIẾN ĐỔI LAPLACE***
Mã môn học: **MATH 121201** *Thời gian* : 90 phút (8/8/2017)
Đề thi gồm 3 trang ***Được phép sử dụng tài liệu***
Mã đề: 0011-0808-2017-0011-0001 (**Nộp lại đề này**)

# PHẦN TRẮC NGHIỆM LỰA CHỌN (5,0 điểm)

**(Chọn 1 trong các câu A, B, C, D rồi điền vào *BÀI LÀM PHẦN TRẮC NGHIỆM* ở trang 6)**

***Câu 1*** Với điều kiện $a,b\in\mathbb{R}$ và $a^2+b^2\neq 0$, xét ***biểu diễn hình học*** của các số phức (trên cùng một mặt phẳng phức): $z_o=a+ib$, $z_1=(a+ib)e^{i\frac{\pi}{2}}$, $z_2=(a+ib)e^{i\frac{2\pi}{2}}$, $z_3=(a+ib)e^{i\frac{3\pi}{2}}$.
Khẳng định nào sau đây đúng?
A) $z_o,z_1,z_2,z_3$ có biểu diễn hình học tương ứng với bốn đỉnh một hình vuông.
B) $z_o,z_1,z_2,z_3$ có biểu diễn hình học tương ứng với bốn đỉnh một hình chữ nhật.
C) $z_o,z_1,z_2,z_3$ có biểu diễn hình học là ba đỉnh một tam giác đều và $z_o\equiv z_3$.
D) $z_o,z_1,z_2,z_3$ thẳng hàng.

***Câu 2*** Cho số phức $z=\dfrac{5}{2-i}-i^{2017}+e^{2+3i}$. Khi đó, phần thực và phần ảo của $z$ là:
A) $\operatorname{Re}z=2-e^2\cos3$, $\operatorname{Im}z=e^2\sin3$
B) $\operatorname{Re}z=2+e^2\cos3$, $\operatorname{Im}z=e^2\sin3$
C) $\operatorname{Re}z=2+\cos3$, $\operatorname{Im}z=\sin3$
D) $\operatorname{Re}z=2+e^2\cos3$, $\operatorname{Im}z=-2+e^2\sin3$

**Câu 3** Ảnh của đường thẳng $y=-x$ qua phép biến hình $w=\dfrac{3}{z}=u+iv$ là
A) Đường tròn $u^2+v^2=1$.
B) Nửa đường thẳng u = -v với u > 0.
C) Đường thẳng u = v.
D) Đường thẳng v = -u .

**Câu 4** Khẳng định nào sau đây **sai?**

**A)** Nếu hàm u(x,y) và v(x,y) điều hòa và thỏa điều kiện (C-R) trên nửa mặt phẳng mở $D=\{z:\operatorname{Im}z>0\}$ thì hàm $f(z)$ = u(x,y) + iv(x,y) giải tích trên $D$.
**B)** Hàm phức $f(z)$ = u(x,y) + iv(x,y) khả vi trên miền D khi và chỉ khi các hàm u(x,y), v(x,y) khả vi và thỏa điều kiện Cauchy – Reimann trên miền D.
**C)** Nếu các hàm $u(x,y),v(x,y)$ không điều hòa trên miền D thì hàm $f(z)$ = u(x,y)+ iv(x,y) không giải tích trên miền D.
**D)** Nếu các hàm $u(x,y),v(x,y)$ điều hòa trên miền D thì hàm $f(z)$ = u(x,y)+ iv(x,y) giải tích trên miền D.

**Câu 5** Trong mặt phẳng phức, cho các hàm số $u(x,y)=8y^2-8x^2-3y$, $v=7x-16xy+5$. Khẳng định nào sau đây **đúng?**
A) u, v điều hòa nhưng không là các hàm điều hòa liên hợp.
B) u, v là các hàm điều hòa liên hợp.
C) u điều hòa, v không điều hòa.
D) v điều hòa, u không điều hòa

***Câu 6*** Khẳng định nào sau đây sai ?
A) Hàm phức $f(z)$ = u(x,y)+ iv(x,y)bị chặn (về mudun) trên miền D khi và chỉ khi các hàm thực u(x,y), v(x,y) bị chặn trên miền D.
B) Nếu hàm phức $f(z)$= u(x,y) +i v(x,y) không liên tục trên miền D thì u(x,y) và v(x,y) không liên tục trên D.
C) Hàm phức $f(z)$ = u(x,y) +i v(x,y) liên tục trên miền D khi và chỉ khi các hàm thực u(x,y), v(x,y) liên tục trên miền D.

D) Cho hàm biến phức $f(z)= u(x,y) + iv(x,y)$, $z_0 = x_0 + iy_0$ và giả sử các giới hạn đều tồn tại. Khi đó: $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} u(x,y) + i \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} v(x,y)$.

***Câu 7*** Khẳng định nào sau đây sai?

A) Nếu a là điểm bất thường cô lập của hàm $f(z)$ và $\lim\limits_{z\to a} f(z)=\infty$, $\lim\limits_{z\to a}(z-a)^m f(z)=A$ (với $0\neq A\neq\infty$) thì a là cực điểm cấp m của hàm $f(z)$.

B) $z=-i$ là cực điểm cấp 2 của hàm $f(z)=\dfrac{e^{3z}+z+i}{(z+i)^2}$

C) $\oint\limits_{|z-2i|=4} \dfrac{e^{3z}+z+i}{(z+i)^2}dz = 2\pi i(3e^{3i}+1)$

D) $\oint\limits_{|z-4i|=2} \dfrac{e^{3z}+z+i}{(z+i)^2}dz = 0$

***Câu 8*** Để giải phương trình tích phân: $y(t)= 2e^{-3t}+2\int\limits_0^t y(u)\cos(t-u)du$ ta làm như sau:

- Phương trình tương đương với : $y(t) = 2e^{-3t} + 2y(t)*\cos t$
- Đặt $Y = Y(p) = \mathscr{L}[y(t)]$ biến đổi Laplace hai vế phương trình ta được
$$Y = \frac{2}{p+3} + 2\mathscr{L}[y(t)]\,\mathscr{L}[\cos t] \Leftrightarrow Y = \frac{2}{p+3} + 2Y\frac{p}{p^2+1}$$
- Giải phương trình với Y là ẩn ta được: $Y = \dfrac{2(p^2+1)}{(p-1)^2(p+3)}$
- Phân tích thành phân thức đơn giản: $Y = \dfrac{A}{(p-1)^2} + \dfrac{B}{p-1} + \dfrac{C}{p+3}$ (với A, B, C = const)
- Biến đổi Laplace ngược hai vế ta được nghiệm : $y(t) = Ate^t + Be^t + Ce^{-3t}$

A) Cách làm sai, tính toán đúng, kết quả sai.

B) Cách làm đúng, tính toán sai, kết quả sai.

C) Cách làm sai, tính toán sai, kết quả sai.

D) Cách làm đúng, tính toán đúng, kết quả đúng.

**<u>Câu 9</u>** Giả sử $\mathscr{L}[f(t)] = F(p)$. Khẳng định nào sau đây **sai?**

A) Nếu f(t) là hàm gốc tuần hoàn với chu kỳ **T** thì $\mathscr{L}[f(t)] = \dfrac{1}{1-e^{-Tp}}\int\limits_0^T e^{-pt} f(t)dt$

B) Nếu $f(t)=\begin{cases} t+\sin t & khi \quad 0<t<\pi \\ 0 & khi \quad \pi<t<2\pi \end{cases}$ và $f(t+2\pi) = f(t)$ thì $\mathscr{L}[f(t)] = \dfrac{1}{1-e^{-2\pi p}}\int\limits_0^{2\pi} e^{-pt}(t+\sin t)dt$

C) $\mathscr{L}[8+t^3e^{-2t}+6\cos 5t] = \dfrac{8}{p} + \dfrac{3!}{(p+2)^4} + \dfrac{6p}{p^2+25}$

D) $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{9p-16}{p^2-64}\right] = 9ch8t - 2sh8t$

***Câu 10*** Khẳng định nào sau đây sai?

**A)** Khai triển Laurent của $e^{\frac{1}{z-i}}$ quanh điểm bất thường cô lập $z_o = i$ là $e^{\frac{1}{z-i}} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{n!(z-i)^n}$

**B)** Khai triển Laurent của hàm $f(z)=(z-i)^3 e^{\frac{1}{z-i}}$ quanh điểm bất thường cô lập $z_o = i$ là $f(z) = (z-i)^3\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{n!(z-i)^n} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{n!(z-i)^{n-3}}$

**C)** $\oint\limits_{|z-2i|=8}(z-i)^3 e^{\frac{1}{z-i}}dz = 2\pi i\dfrac{1}{4!} = \dfrac{\pi i}{12}$ **D)** $z_o = i$ là điểm bất thường bỏ được của hàm $f(z)=(z-i)^3 e^{\frac{1}{z-i}}$.

# PHẦN TỰ LUẬN (5,0 điểm)

***Câu 11*** ( *1,5điểm*) Áp dụng phép biến đổi Laplace giải phương trình vi phân

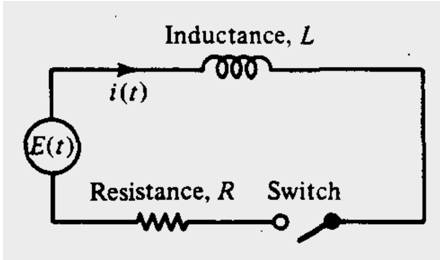
$$y''-7y'+6y=3+\cos 2t \text{ với điều kiện } y(0)=0 \text{ và } y'(0)=0$$

***Câu 12*** (1,5 *điểm*)

Cho mạch điện RL như hình vẽ thỏa phương trình vi phân

$$L\frac{di(t)}{dt}+R\,i(t)=E_o\cos 3t \text{ , i(0) = 0}$$

với $E_o, R, L$ là các hằng số dương.




a) Áp dụng phép biến đổi Laplace giải phương trình vi phân để tìm $i(t)$.

b) Chứng tỏ rằng sau khoảng thời gian $t$ đủ lớn nghiệm của phương trình vi phân, $i(t)$, biểu diễn xấp xỉ một dao động điều hòa theo thời gian $t$. Xác định biên độ dao động này theo $E_o, R, L$.

***Câu 13*** (2 *điểm*)

a) Áp dụng phép biến đổi Laplace giải hệ phương trình vi phân

$$\begin{cases} x'-3y=2 \\ x+y'+4y=0 \end{cases}, \text{ điều kiện x(0)= y(0) = 0}$$

b) Tính $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t)$, $\lim\limits_{t\to+\infty} y(t)$. Xác tọa độ gần đúng trong mặt phẳng $Oxy$ của điểm $M\big(x(t);y(t)\big)$ sau khoảng thời gian t đủ lớn.

**Ghi chú :** *Cán bộ coi thi không được giải thích đề thi.*

**CHUẨN ĐẦU RA**

| **Nội dung kiểm tra** | **Chuẩn đầu ra của học phần (về kiến thức)** |
|---|---|
| Từ câu 1 đến câu 10 | G1: 1.1, 1.2<br>G2: 2.1.1, 2.1.2, 2.1.3, 2.1.4 , 2.4.3 |
| Câu 11, Câu 12, Câu 13: Áp dụng phép biến đổi Laplace giải phương trình vi phân, hệ phương trình vi phân rồi ứng dụng vào đời sống. | G1: 1.1, 1.2<br>G2: 2.1.3, 2.1.3, 2.1.4 , 2.4.3 |

Ngày 7 tháng 8 năm 2017

Thông qua Bộ môn Toán

<table>
<tr><td colspan="2">TRƯỜNG ĐH SƯ PHẠM KỸ THUẬT TP.HCM<br>BỘ MÔN TOÁN<br>THI CUỐI KỲ HỌC KỲ III NĂM HỌC 2016-2017<br>MÔN: HÀM BIẾN PHỨC VÀ PHÉP BIẾN ĐỔI LAPLACE<br>Mã đề: 0011-0808-2017-0011-0001</td><td rowspan="3">Họ, tên sinh viên: ....................................<br>Mã số sinh viên:...............................<br>Số báo danh (STT):........ Phòng thi: ....<br>Thời gian : 90 phút (8/8/2017)<br>Lưu ý: Sinh viên làm bài thi lần lượt trên trang 6, 5, 4,3. Đối với các hệ phương trình đại số tuyến tính thì chỉ cần ghi kết quả vào bài làm mà không cần trình bày cách giải.<br>Sinh viên nộp lại đề thi cùng với bài làm.</td></tr>
<tr><td>Giám thị 1</td><td>Giám thị 2</td></tr>
<tr><td>Giáo viên chấm thi 1&2</td><td>ĐIỂM</td></tr>
</table>

## BÀI LÀM PHẦN TRẮC NGHIỆM

| **Câu hỏi** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** | **9** | **10** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Trả lời** | | | | | | | | | | |

## BÀI LÀM PHẦN TỰ LUẬN

Trường ĐH Sư phạm Kỹ thuật Tp.HCM
KHOA KHOA HỌC ỨNG DỤNG
BỘ MÔN TOÁN

**ĐỀ THI CUỐI KỲ *HỌC KỲ III NĂM HỌC 2016-2017***
**MÔN**: ***HÀM BIẾN PHỨC VÀ PHÉP BIẾN ĐỔI LAPLACE***
Mã môn học: **MATH 121201** *Thời gian* : 90 phút (8/8/2017)
Đề thi gồm 3 trang ***Được phép sử dụng tài liệu***
Mã đề: 0011-0808-2017-0011-0010 (**Nộp lại đề này**)

# PHẦN TRẮC NGHIỆM LỰA CHỌN (5,0 điểm)

**(Chọn 1 trong các câu A, B, C, D rồi điền vào *BÀI LÀM PHẦN TRẮC NGHIỆM* ở trang 6)**

***Câu 1*** Khẳng định nào sau đây sai?

A) Nếu a là điểm bất thường cô lập của hàm $f(z)$ và $\lim\limits_{z\to a} f(z)=\infty$, $\lim\limits_{z\to a}(z-a)^m f(z)=A$ (với $0\neq A\neq\infty$) thì a là cực điểm cấp m của hàm $f(z)$.

B) $z=-i$ là cực điểm cấp 2 của hàm $f(z)=\dfrac{e^{3z}+z+i}{(z+i)^2}$

C) $\oint\limits_{|z-2i|=4}\dfrac{e^{3z}+z+i}{(z+i)^2}dz = 2\pi i(3e^{3i}+1)$

D) $\oint\limits_{|z-4i|=2}\dfrac{e^{3z}+z+i}{(z+i)^2}dz = 0$

***Câu 2*** Để giải phương trình tích phân: y(t)= $2e^{-3t}+2\int\limits_0^t y(u)\cos(t-u)du$ ta làm như sau:

- Phương trình tương đương với : y(t) = $2e^{-3t}$ +2y(t)*cost
- Đặt Y = Y(p) = $\mathscr{L}$[y(t)] biến đổi Laplace hai vế phương trình ta được

$$Y = \frac{2}{p+3} + 2\mathscr{L}[y(t)]\,\mathscr{L}[\cos t] \Leftrightarrow Y = \frac{2}{p+3} + 2Y\frac{p}{p^2+1}$$

- Giải phương trình với Y là ẩn ta được: Y = $\dfrac{2(p^2+1)}{(p-1)^2(p+3)}$
- Phân tích thành phân thức đơn giản: Y = $\dfrac{A}{(p-1)^2}+\dfrac{B}{p-1}+\dfrac{C}{p+3}$ (với A, B, C = const)
- Biến đổi Laplace ngược hai vế ta được nghiệm : y(t) = $Ate^t+Be^t+Ce^{-3t}$

A) Cách làm sai, tính toán đúng, kết quả sai.
B) Cách làm đúng, tính toán sai, kết quả sai.
C) Cách làm sai, tính toán sai, kết quả sai.
D) Cách làm đúng, tính toán đúng, kết quả đúng.

**Câu 3** Giả sử $\mathscr{L}$[f(t)] = F(p). Khẳng định nào sau đây **sai?**

A) Nếu f(t) là hàm gốc tuần hoàn với chu kỳ **T** thì $\mathscr{L}$[f(t)] = $\dfrac{1}{1-e^{-Tp}}\int\limits_0^T e^{-pt}f(t)dt$

B) Nếu $f(t)=\begin{cases} t+\sin t & khi\quad 0<t<\pi \\ 0 & khi\quad \pi<t<2\pi\end{cases}$ và f(t+2π) = f(t) thì $\mathscr{L}$[f(t)] = $\dfrac{1}{1-e^{-2\pi p}}\int\limits_0^{2\pi} e^{-pt}(t+\sin t)dt$

C) $\mathscr{L}[8+t^3e^{-2t}+6\cos 5t]=\dfrac{8}{p}+\dfrac{3!}{(p+2)^4}+\dfrac{6p}{p^2+25}$

D) $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{9p-16}{p^2-64}\right]=9ch8t-2sh8t$

***Câu 4*** Khẳng định nào sau đây sai?

**A)** Khai triển Laurent của $e^{\frac{1}{z-i}}$ quanh điểm bất thường cô lập $z_o=i$ là $e^{\frac{1}{z-i}}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{n!(z-i)^n}$

**B)** Khai triển Laurent của hàm $f(z)=(z-i)^3e^{\frac{1}{z-i}}$ quanh điểm bất thường cô lập $z_o=i$ là

$f(z)= (z-i)^3\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!(z-i)^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!(z-i)^{n-3}}$

**C)** $\oint\limits_{|z-2i|=8}(z-i)^3 e^{\frac{1}{z-i}}dz = 2\pi i\frac{1}{4!}=\frac{\pi i}{12}$ **D)** $z_o = i$ là điểm bất thường bỏ được của hàm $f(z)=(z-i)^3 e^{\frac{1}{z-i}}$.

***Câu 5*** Với điều kiện $a,b\in\mathbb{R}$ và $a^2+b^2\neq 0$, xét ***biểu diễn hình học*** của các số phức (trên cùng một mặt phẳng phức): $z_o = a+ib$, $z_1=(a+ib)e^{i\frac{\pi}{2}}$, $z_2=(a+ib)e^{i\frac{2\pi}{2}}$, $z_3=(a+ib)e^{i\frac{3\pi}{2}}$.

Khẳng định nào sau đây đúng?

A) $z_o,z_1,z_2,z_3$ có biểu diễn hình học tương ứng với bốn đỉnh một hình vuông.

B) $z_o,z_1,z_2,z_3$ có biểu diễn hình học tương ứng với bốn đỉnh một hình chữ nhật.

C) $z_o,z_1,z_2,z_3$ có biểu diễn hình học là ba đỉnh một tam giác đều và $z_o\equiv z_3$.

D) $z_o,z_1,z_2,z_3$ thẳng hàng.

***Câu 6*** Cho số phức z = $\frac{5}{2-i}-i^{2017}+e^{2+3i}$. Khi đó, phần thực và phần ảo của $z$ là:

A) $\operatorname{Re} z = 2-e^2\cos 3$ , $\operatorname{Im} z = e^2\sin 3$

B) $\operatorname{Re} z = 2+e^2\cos 3$ , $\operatorname{Im} z = e^2\sin 3$

C) $\operatorname{Re} z = 2+\cos 3$ , $\operatorname{Im} z = \sin 3$

D) $\operatorname{Re} z = 2+e^2\cos 3$ , $\operatorname{Im} z = -2+e^2\sin 3$

**Câu 7** Ảnh của đường thẳng $y=-x$ qua phép biến hình w = $\frac{3}{z}$ = u +iv là

A) Đường tròn $u^2+v^2=1$.

B) Nửa đường thẳng u = -v với u > 0.

C) Đường thẳng u = v.

D) Đường thẳng v = -u .

**Câu 8** Khẳng định nào sau đây **sai?**

**A)** Nếu hàm u(x,y) và v(x,y) điều hòa và thỏa điều kiện (C-R) trên nửa mặt phẳng mở $D=\{z:\operatorname{Im} z>0\}$ thì hàm $f(z)$ = u(x,y) + iv(x,y) giải tích trên $D$.

**B)** Hàm phức $f(z)$ = u(x,y) + iv(x,y) khả vi trên miền D khi và chỉ khi các hàm u(x,y), v(x,y) khả vi và thỏa điều kiện Cauchy – Reimann trên miền D.

**C)** Nếu các hàm $u(x,y),v(x,y)$ không điều hòa trên miền D thì hàm $f(z)$ = u(x,y)+ iv(x,y) không giải tích trên miền D.

**D)** Nếu các hàm $u(x,y),v(x,y)$ điều hòa trên miền D thì hàm $f(z)$ = u(x,y)+ iv(x,y) giải tích trên miền D.

**Câu 9** Trong mặt phẳng phức, cho các hàm số $u(x,y)=8y^2-8x^2-3y$, $v=7x-16xy+5$. Khẳng định nào sau đây **đúng?**

A) u, v điều hòa nhưng không là các hàm điều hòa liên hợp.

B) u, v là các hàm điều hòa liên hợp.

C) u điều hòa, v không điều hòa.

D) v điều hòa, u không điều hòa

***Câu 10*** Khẳng định nào sau đây sai ?

A) Hàm phức $f(z)$ = u(x,y)+ iv(x,y)bị chặn (về mudun) trên miền D khi và chỉ khi các hàm thực u(x,y), v(x,y) bị chặn trên miền D.

B) Nếu hàm phức $f(z)$= u(x,y) +i v(x,y) không liên tục trên miền D thì u(x,y) và v(x,y) không liên tục trên D.

C) Hàm phức $f(z)$ = u(x,y) +i v(x,y) liên tục trên miền D khi và chỉ khi các hàm thực u(x,y), v(x,y) liên tục trên miền D.

D) Cho hàm biến phức $f(z)$= u(x,y) +iv(x,y), $z_0 = x_0 + iy_0$ và giả sử các giới hạn đều tồn tại. Khi đó: $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} u(x,y) + i\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} v(x,y)$.

## PHẦN TỰ LUẬN (5,0 điểm)

***Câu 11*** ( *1,5điểm*) Áp dụng phép biến đổi Laplace giải phương trình vi phân

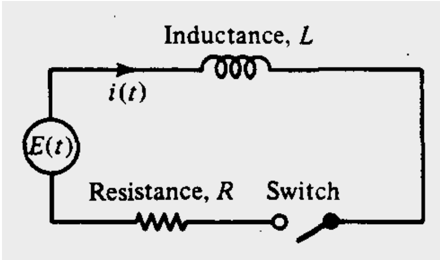
$$y''-7y'+6y=3+\cos 2t \text{ với điều kiện } y(0)=0 \text{ và } y'(0)=0$$

***Câu 12*** (1,5 *điểm*)

Cho mạch điện RL như hình vẽ thỏa phương trình vi phân

$$L\frac{di(t)}{dt}+R\,i(t) = E_o\cos 3t \;,\; i(0)=0$$

với $E_o, R, L$ là các hằng số dương.




a) Áp dụng phép biến đổi Laplace giải phương trình vi phân để tìm $i(t)$.

b) Chứng tỏ rằng sau khoảng thời gian $t$ đủ lớn nghiệm của phương trình vi phân, $i(t)$, biểu diễn xấp xỉ một dao động điều hòa theo thời gian $t$. Xác định biên độ dao động này theo $E_o, R, L$.

***Câu 13*** (2 *điểm*)

a) Áp dụng phép biến đổi Laplace giải hệ phương trình vi phân

$$\begin{cases} x'-3y=2 \\ x+y'+4y=0 \end{cases}, \text{ điều kiện } x(0)= y(0) = 0$$

b) Tính $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t)$, $\lim\limits_{t\to+\infty} y(t)$. Xác tọa độ gần đúng trong mặt phẳng $Oxy$ của điểm $M(x(t);y(t))$ sau khoảng thời gian t đủ lớn.

**Ghi chú :** *Cán bộ coi thi không được giải thích đề thi.*

**CHUẨN ĐẦU RA**

| **Nội dung kiểm tra** | **Chuẩn đầu ra của học phần (về kiến thức)** |
|---|---|
| Từ câu 1 đến câu 10 | G1: 1.1, 1.2<br>G2: 2.1.1, 2.1.2, 2.1.3, 2.1.4 , 2.4.3 |
| Câu 11, Câu 12, Câu 13: Áp dụng phép biến đổi Laplace giải phương trình vi phân, hệ phương trình vi phân rồi ứng dụng vào đời sống. | G1: 1.1, 1.2<br>G2: 2.1.3, 2.1.3, 2.1.4 , 2.4.3 |

Ngày 7 tháng 8 năm 2017

Thông qua Bộ môn Toán

| TRƯỜNG ĐH SƯ PHẠM KỸ THUẬT TP.HCM<br>BỘ MÔN TOÁN<br>**THI CUỐI KỲ *HỌC KỲ III NĂM HỌC 2016-2017***<br>**MÔN**: **HÀM BIẾN PHỨC VÀ PHÉP BIẾN ĐỔI LAPLACE**<br>Mã đề: 0011-0808-2017-0011-0010 | | Họ, tên sinh viên: .....................................<br>Mã số sinh viên:...............................<br>Số báo danh (***STT***):........ Phòng thi: ....<br>*Thời gian* : 90 phút (8/8/2017)<br>**Lưu ý**: Sinh viên làm bài thi lần lượt trên trang 6, 5, 4,3. Đối với các hệ phương trình đại số tuyến tính thì chỉ cần ghi kết quả vào bài làm mà không cần trình bày cách giải.<br>***Sinh viên nộp lại đề thi cùng với bài làm.*** |
|---|---|---|
| ***Giám thị 1*** | ***Giám thị 2*** | |
| ***Giáo viên chấm thi 1&2*** | **ĐIỂM** | |

## BÀI LÀM PHẦN TRẮC NGHIỆM

| **Câu hỏi** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** | **9** | **10** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Trả lời** | | | | | | | | | | |

## BÀI LÀM PHẦN TỰ LUẬN

Trường ĐH Sư phạm Kỹ thuật Tp.HCM
KHOA KHOA HỌC ỨNG DỤNG
BỘ MÔN TOÁN

**ĐỀ THI CUỐI KỲ *HỌC KỲ III NĂM HỌC 2016-2017***
**MÔN**: ***HÀM BIẾN PHỨC VÀ PHÉP BIẾN ĐỔI LAPLACE***
Mã môn học: **MATH 121201** *Thời gian* : 90 phút (8/8/2017)
Đề thi gồm 3 trang ***Được phép sử dụng tài liệu***
Mã đề: 0011-0808-2017-0011-0011 (**Nộp lại đề này**)

# PHẦN TRẮC NGHIỆM LỰA CHỌN (5,0 điểm)

**(Chọn 1 trong các câu A, B, C, D rồi điền vào *BÀI LÀM PHẦN TRẮC NGHIỆM* ở trang 6)**

**<u>Câu 1</u>** Trong mặt phẳng phức, cho các hàm số $u(x,y) = 8y^2 - 8x^2 - 3y$, $v = 7x - 16xy + 5$. Khẳng định nào sau đây **đúng?**

A) u, v điều hòa nhưng không là các hàm điều hòa liên hợp.
B) u, v là các hàm điều hòa liên hợp.
C) u điều hòa, v không điều hòa.
D) v điều hòa, u không điều hòa

***<u>Câu 2</u>*** Khẳng định nào sau đây sai ?

A) Hàm phức $f(z)$ = u(x,y)+ iv(x,y)bị chặn (về mudun) trên miền D khi và chỉ khi các hàm thực u(x,y), v(x,y) bị chặn trên miền D.
B) Nếu hàm phức $f(z)$= u(x,y) +i v(x,y) không liên tục trên miền D thì u(x,y) và v(x,y) không liên tục trên D.
C) Hàm phức $f(z)$ = u(x,y) +i v(x,y) liên tục trên miền D khi và chỉ khi các hàm thực u(x,y), v(x,y) liên tục trên miền D.
D) Cho hàm biến phức $f(z)$= u(x,y) +iv(x,y), $z_0 = x_0 + iy_0$ và giả sử các giới hạn đều tồn tại. Khi đó: $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} u(x,y) + i \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} v(x,y)$.

***<u>Câu 3</u>*** Với điều kiện $a,b \in \mathbb{R}$ và $a^2 + b^2 \neq 0$, xét ***biểu diễn hình học*** của các số phức (trên cùng một mặt phẳng phức): $z_o = a + ib$, $z_1 = (a+ib)e^{i\frac{\pi}{2}}$, $z_2 = (a+ib)e^{i\frac{2\pi}{2}}$, $z_3 = (a+ib)e^{i\frac{3\pi}{2}}$.
Khẳng định nào sau đây đúng?

A) $z_o, z_1, z_2, z_3$ có biểu diễn hình học tương ứng với bốn đỉnh một hình vuông.
B) $z_o, z_1, z_2, z_3$ có biểu diễn hình học tương ứng với bốn đỉnh một hình chữ nhật.
C) $z_o, z_1, z_2, z_3$ có biểu diễn hình học là ba đỉnh một tam giác đều và $z_o \equiv z_3$.
D) $z_o, z_1, z_2, z_3$ thẳng hàng.

***<u>Câu 4</u>*** Cho số phức z = $\dfrac{5}{2-i} - i^{2017} + e^{2+3i}$. Khi đó, phần thực và phần ảo của $z$ là:

A) $\operatorname{Re} z = 2 - e^2\cos 3$ , $\operatorname{Im} z = e^2 \sin 3$
B) $\operatorname{Re} z = 2 + e^2\cos 3$ , $\operatorname{Im} z = e^2 \sin 3$
C) $\operatorname{Re} z = 2 + \cos 3$ , $\operatorname{Im} z = \sin 3$
D) $\operatorname{Re} z = 2 + e^2\cos 3$ , $\operatorname{Im} z = -2 + e^2 \sin 3$

**<u>Câu 5</u>** Ảnh của đường thẳng $y = -x$ qua phép biến hình w = $\dfrac{3}{z}$ = u +iv là

A) Đường tròn $u^2 + v^2 = 1$.
B) Nửa đường thẳng u = -v với u > 0.
C) Đường thẳng u = v.
D) Đường thẳng v = -u .

**<u>Câu 6</u>** Khẳng định nào sau đây **sai?**

**A)** Nếu hàm u(x,y) và v(x,y) điều hòa và thỏa điều kiện (C-R) trên nửa mặt phẳng mở $D = \{z : \operatorname{Im} z > 0\}$ thì hàm $f(z)$ = u(x,y) + iv(x,y) giải tích trên $D$.
**B)** Hàm phức $f(z)$ = u(x,y) + iv(x,y) khả vi trên miền D khi và chỉ khi các hàm u(x,y), v(x,y) khả vi và thỏa điều kiện Cauchy – Reimann trên miền D.

**C)** Nếu các hàm $u(x,y), v(x,y)$ không điều hòa trên miền D thì hàm $f(z)$ = u(x,y)+ iv(x,y) không giải tích trên miền D.

**D)** Nếu các hàm $u(x,y), v(x,y)$ điều hòa trên miền D thì hàm $f(z)$ = u(x,y)+ iv(x,y) giải tích trên miền D.

**<u>Câu 7</u>** Giả sử $\mathscr{L}$[f(t)] = F(p). Khẳng định nào sau đây **sai?**

A) Nếu f(t) là hàm gốc tuần hoàn với chu kỳ **T** thì $\mathscr{L}$[f(t)] = $\dfrac{1}{1-e^{-Tp}}\int_0^T e^{-pt} f(t)dt$

B) Nếu $f(t)=\begin{cases} t+\sin t & khi \quad 0<t<\pi \\ 0 & khi \quad \pi<t<2\pi \end{cases}$ và f(t+2π) = f(t) thì $\mathscr{L}$[f(t)] = $\dfrac{1}{1-e^{-2\pi p}}\int_0^{2\pi} e^{-pt}(t+\sin t)dt$

C) $\mathscr{L}[8+t^3e^{-2t}+6\cos 5t]=\dfrac{8}{p}+\dfrac{3!}{(p+2)^4}+\dfrac{6p}{p^2+25}$

D) $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{9p-16}{p^2-64}\right]=9ch8t-2sh8t$

***<u>Câu 8</u>*** Khẳng định nào sau đây sai?

**A)** Khai triển Laurent của $e^{\frac{1}{z-i}}$ quanh điểm bất thường cô lập $z_o=i$ là $e^{\frac{1}{z-i}}=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{n!(z-i)^n}$

**B)** Khai triển Laurent của hàm $f(z)=(z-i)^3e^{\frac{1}{z-i}}$ quanh điểm bất thường cô lập $z_o=i$ là $f(z)=(z-i)^3\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{n!(z-i)^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{n!(z-i)^{n-3}}$

**C)** $\oint\limits_{|z-2i|=8}(z-i)^3e^{\frac{1}{z-i}}dz=2\pi i\dfrac{1}{4!}=\dfrac{\pi i}{12}$

**D)** $z_o=i$ là điểm bất thường bỏ được của hàm $f(z)=(z-i)^3e^{\frac{1}{z-i}}$.

***<u>Câu 9</u>*** Khẳng định nào sau đây sai*?*

A) Nếu a là điểm bất thường cô lập của hàm $f(z)$ và $\lim\limits_{z\to a}f(z)=\infty$, $\lim\limits_{z\to a}(z-a)^m f(z)=A$ (với $0\neq A\neq\infty$) thì a là cực điểm cấp m của hàm $f(z)$.

B) $z=-i$ là cực điểm cấp 2 của hàm $f(z)=\dfrac{e^{3z}+z+i}{(z+i)^2}$

C) $\oint\limits_{|z-2i|=4}\dfrac{e^{3z}+z+i}{(z+i)^2}dz=2\pi i(3e^{3i}+1)$

D) $\oint\limits_{|z-4i|=2}\dfrac{e^{3z}+z+i}{(z+i)^2}dz=0$

***<u>Câu 10</u>*** Để giải phương trình tích phân: y(t)= $2e^{-3t}+2\int_0^t y(u)\cos(t-u)du$ ta làm như sau:

- Phương trình tương đương với : y(t) = $2e^{-3t}$ +2y(t)*cost
- Đặt Y = Y(p) = $\mathscr{L}$[y(t)] biến đổi Laplace hai vế phương trình ta được

$$Y=\frac{2}{p+3}+2\mathscr{L}[y(t)]\,\mathscr{L}[\cos t] \Leftrightarrow Y=\frac{2}{p+3}+2Y\frac{p}{p^2+1}$$

- Giải phương trình với Y là ẩn ta được: Y = $\dfrac{2(p^2+1)}{(p-1)^2(p+3)}$
- Phân tích thành phân thức đơn giản: Y = $\dfrac{A}{(p-1)^2}+\dfrac{B}{p-1}+\dfrac{C}{p+3}$ (với A, B, C = const)
- Biến đổi Laplace ngược hai vế ta được nghiệm : y(t) = $Ate^t+Be^t+Ce^{-3t}$

A) Cách làm sai, tính toán đúng, kết quả sai.
B) Cách làm đúng, tính toán sai, kết quả sai.
C) Cách làm sai, tính toán sai, kết quả sai.
D) Cách làm đúng, tính toán đúng, kết quả đúng.

# PHẦN TỰ LUẬN (5,0 điểm)

***Câu 11*** ( *1,5điểm*) Áp dụng phép biến đổi Laplace giải phương trình vi phân

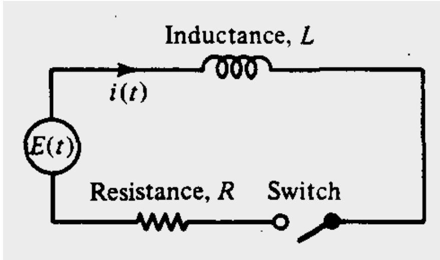
$$y''-7y'+6y=3+\cos 2t \text{ với điều kiện } y(0)=0 \text{ và } y'(0)=0$$

***Câu 12*** (1,5 *điểm*)

Cho mạch điện RL như hình vẽ thỏa phương trình vi phân

$$L\frac{di(t)}{dt}+R\,i(t) = E_o\cos 3t \;,\; i(0)=0$$

với $E_o, R, L$ là các hằng số dương.




a) Áp dụng phép biến đổi Laplace giải phương trình vi phân để tìm $i(t)$.

b) Chứng tỏ rằng sau khoảng thời gian $t$ đủ lớn nghiệm của phương trình vi phân, $i(t)$, biểu diễn xấp xỉ một dao động điều hòa theo thời gian $t$. Xác định biên độ dao động này theo $E_o, R, L$.

***Câu 13*** (2 *điểm*)

a) Áp dụng phép biến đổi Laplace giải hệ phương trình vi phân

$$\begin{cases} x'-3y=2 \\ x+y'+4y=0 \end{cases}, \text{ điều kiện } x(0)= y(0) = 0$$

b) Tính $\lim_{t\to+\infty} x(t)$, $\lim_{t\to+\infty} y(t)$. Xác tọa độ gần đúng trong mặt phẳng $Oxy$ của điểm $M(x(t);y(t))$ sau khoảng thời gian t đủ lớn.

**Ghi chú :** *Cán bộ coi thi không được giải thích đề thi.*

**CHUẨN ĐẦU RA**

| **Nội dung kiểm tra** | **Chuẩn đầu ra của học phần (về kiến thức)** |
|---|---|
| Từ câu 1 đến câu 10 | G1: 1.1, 1.2<br>G2: 2.1.1, 2.1.2, 2.1.3, 2.1.4 , 2.4.3 |
| Câu 11, Câu 12, Câu 13: Áp dụng phép biến đổi Laplace giải phương trình vi phân, hệ phương trình vi phân rồi ứng dụng vào đời sống. | G1: 1.1, 1.2<br>G2: 2.1.3, 2.1.3, 2.1.4 , 2.4.3 |

Ngày 7 tháng 8 năm 2017
Thông qua Bộ môn Toán

<table>
<tr><td colspan="2">TRƯỜNG ĐH SƯ PHẠM KỸ THUẬT TP.HCM<br>BỘ MÔN TOÁN<br>THI CUỐI KỲ HỌC KỲ III NĂM HỌC 2016-2017<br>MÔN: HÀM BIẾN PHỨC VÀ PHÉP BIẾN ĐỔI LAPLACE<br>Mã đề: 0011-0808-2017-0011-0011</td><td rowspan="3">Họ, tên sinh viên: ......................................<br>Mã số sinh viên:................................<br>Số báo danh (STT):........ Phòng thi: ....<br>Thời gian : 90 phút (8/8/2017)<br>Lưu ý: Sinh viên làm bài thi lần lượt trên trang 6, 5, 4,3. Đối với các hệ phương trình đại số tuyến tính thì chỉ cần ghi kết quả vào bài làm mà không cần trình bày cách giải.<br>Sinh viên nộp lại đề thi cùng với bài làm.</td></tr>
<tr><td>Giám thị 1</td><td>Giám thị 2</td></tr>
<tr><td>Giáo viên chấm thi 1&2</td><td>ĐIỂM</td></tr>
</table>

## BÀI LÀM PHẦN TRẮC NGHIỆM

| Câu hỏi | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Trả lời | | | | | | | | | | |

## BÀI LÀM PHẦN TỰ LUẬN

Trường ĐH Sư phạm Kỹ thuật Tp.HCM
KHOA KHOA HỌC ỨNG DỤNG
BỘ MÔN TOÁN

**ĐỀ THI CUỐI KỲ *HỌC KỲ III NĂM HỌC 2016-2017***
**MÔN**: ***HÀM BIẾN PHỨC VÀ PHÉP BIẾN ĐỔI LAPLACE***
Mã môn học: **MATH 121201** *Thời gian* : 90 phút (8/8/2017)
Đề thi gồm 3 trang ***Được phép sử dụng tài liệu***
Mã đề: 0011-0808-2017-0011-0100 (**Nộp lại đề này**)

# PHẦN TRẮC NGHIỆM LỰA CHỌN (5,0 điểm)

**(Chọn 1 trong các câu A, B, C, D rồi điền vào *BÀI LÀM PHẦN TRẮC NGHIỆM* ở trang 6)**

**Câu 1** Giả sử $\mathscr{L}[f(t)] = F(p)$. Khẳng định nào sau đây **sai?**

A) Nếu f(t) là hàm gốc tuần hoàn với chu kỳ **T** thì $\mathscr{L}[f(t)] = \dfrac{1}{1-e^{-Tp}}\int_0^T e^{-pt} f(t)dt$

B) Nếu $f(t) = \begin{cases} t+\sin t & khi \quad 0 < t < \pi \\ 0 & khi \quad \pi < t < 2\pi \end{cases}$ và f(t+2π) = f(t) thì $\mathscr{L}[f(t)] = \dfrac{1}{1-e^{-2\pi p}}\int_0^{2\pi} e^{-pt}(t+\sin t)dt$

C) $\mathscr{L}[8 + t^3 e^{-2t} + 6\cos 5t] = \dfrac{8}{p} + \dfrac{3!}{(p+2)^4} + \dfrac{6p}{p^2+25}$

D) $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{9p-16}{p^2-64}\right] = 9ch8t - 2sh8t$

**Câu 2** Khẳng định nào sau đây sai?

**A)** Khai triển Laurent của $e^{\frac{1}{z-i}}$ quanh điểm bất thường cô lập $z_o = i$ là $e^{\frac{1}{z-i}} = \sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{n!(z-i)^n}$

**B)** Khai triển Laurent của hàm $f(z) = (z-i)^3 e^{\frac{1}{z-i}}$ quanh điểm bất thường cô lập $z_o = i$ là

$$f(z) = (z-i)^3\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!(z-i)^n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!(z-i)^{n-3}}$$

**C)** $\oint_{|z-2i|=8}(z-i)^3 e^{\frac{1}{z-i}}dz = 2\pi i\dfrac{1}{4!} = \dfrac{\pi i}{12}$

**D)** $z_o = i$ là điểm bất thường bỏ được của hàm $f(z) = (z-i)^3 e^{\frac{1}{z-i}}$.

**Câu 3** Khẳng định nào sau đây sai?

A) Nếu a là điểm bất thường cô lập của hàm $f(z)$ và $\lim_{z\to a} f(z) = \infty$, $\lim_{z\to a}(z-a)^m f(z) = A$ (với $0 \neq A \neq \infty$) thì a là cực điểm cấp m của hàm $f(z)$.

B) $z = -i$ là cực điểm cấp 2 của hàm $f(z) = \dfrac{e^{3z}+z+i}{(z+i)^2}$

C) $\oint_{|z-2i|=4}\dfrac{e^{3z}+z+i}{(z+i)^2}dz = 2\pi i(3e^{3i}+1)$

D) $\oint_{|z-4i|=2}\dfrac{e^{3z}+z+i}{(z+i)^2}dz = 0$

**Câu 4** Để giải phương trình tích phân: $y(t) = 2e^{-3t} + 2\int_0^t y(u)\cos(t-u)du$ ta làm như sau:

- Phương trình tương đương với : $y(t) = 2e^{-3t} + 2y(t)*\cos t$
- Đặt $Y = Y(p) = \mathscr{L}[y(t)]$ biến đổi Laplace hai vế phương trình ta được

$$Y = \frac{2}{p+3} + 2\mathscr{L}[y(t)]\,\mathscr{L}[\cos t] \Leftrightarrow Y = \frac{2}{p+3} + 2Y\frac{p}{p^2+1}$$

- Giải phương trình với Y là ẩn ta được: $Y = \dfrac{2(p^2+1)}{(p-1)^2(p+3)}$
- Phân tích thành phân thức đơn giản: $Y = \dfrac{A}{(p-1)^2} + \dfrac{B}{p-1} + \dfrac{C}{p+3}$ (với A, B, C = const)

♦ Biến đổi Laplace ngược hai vế ta được nghiệm : y(t) = $Ate^t + Be^t + Ce^{-3t}$

A) Cách làm sai, tính toán đúng, kết quả sai.
B) Cách làm đúng, tính toán sai, kết quả sai.
C) Cách làm sai, tính toán sai, kết quả sai.
D) Cách làm đúng, tính toán đúng, kết quả đúng.

**<u>Câu 5</u>** Trong mặt phẳng phức, cho các hàm số $u(x,y) = 8y^2 - 8x^2 - 3y$, $v = 7x - 16xy + 5$. Khẳng định nào sau đây **đúng?**

A) u, v điều hòa nhưng không là các hàm điều hòa liên hợp.
B) u, v là các hàm điều hòa liên hợp.
C) u điều hòa, v không điều hòa.
D) v điều hòa, u không điều hòa

***<u>Câu 6</u>*** Khẳng định nào sau đây sai ?

A) Hàm phức $f(z)$ = u(x,y)+ iv(x,y)bị chặn (về mudun) trên miền D khi và chỉ khi các hàm thực u(x,y), v(x,y) bị chặn trên miền D.

B) Nếu hàm phức $f(z)$= u(x,y) +i v(x,y) không liên tục trên miền D thì u(x,y) và v(x,y) không liên tục trên D.

C) Hàm phức $f(z)$ = u(x,y) +i v(x,y) liên tục trên miền D khi và chỉ khi các hàm thực u(x,y), v(x,y) liên tục trên miền D.

D) Cho hàm biến phức $f(z)$= u(x,y) +iv(x,y), $z_0 = x_0 + iy_0$ và giả sử các giới hạn đều tồn tại. Khi đó: $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} u(x,y) + i \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} v(x,y)$.

***<u>Câu 7</u>*** Với điều kiện $a, b \in \mathbb{R}$ và $a^2 + b^2 \neq 0$, xét ***biểu diễn hình học*** của các số phức (trên cùng một mặt phẳng phức): $z_o = a + ib$, $z_1 = (a+ib)e^{i\frac{\pi}{2}}$, $z_2 = (a+ib)e^{i\frac{2\pi}{2}}$, $z_3 = (a+ib)e^{i\frac{3\pi}{2}}$.

Khẳng định nào sau đây đúng?

A) $z_o, z_1, z_2, z_3$ có biểu diễn hình học tương ứng với bốn đỉnh một hình vuông.

B) $z_o, z_1, z_2, z_3$ có biểu diễn hình học tương ứng với bốn đỉnh một hình chữ nhật.

C) $z_o, z_1, z_2, z_3$ có biểu diễn hình học là ba đỉnh một tam giác đều và $z_o \equiv z_3$.

D) $z_o, z_1, z_2, z_3$ thẳng hàng.

***<u>Câu 8</u>*** Cho số phức z = $\dfrac{5}{2-i} - i^{2017} + e^{2+3i}$. Khi đó, phần thực và phần ảo của $z$ là:

A) $\mathrm{Re}\, z = 2 - e^2\cos 3$ , $\mathrm{Im}\, z = e^2 \sin 3$
B) $\mathrm{Re}\, z = 2 + e^2\cos 3$ , $\mathrm{Im}\, z = e^2 \sin 3$
C) $\mathrm{Re}\, z = 2 + \cos 3$ , $\mathrm{Im}\, z = \sin 3$
D) $\mathrm{Re}\, z = 2 + e^2\cos 3$ , $\mathrm{Im}\, z = -2 + e^2 \sin 3$

**<u>Câu 9</u>** Ảnh của đường thẳng $y = -x$ qua phép biến hình w = $\dfrac{3}{z}$ = u +iv là

A) Đường tròn $u^2 + v^2 = 1$.
B) Nửa đường thẳng u = -v với u > 0.
C) Đường thẳng u = v.
D) Đường thẳng v = -u .

**<u>Câu 10</u>** Khẳng định nào sau đây **sai?**

**A)** Nếu hàm u(x,y) và v(x,y) điều hòa và thỏa điều kiện (C-R) trên nửa mặt phẳng mở $D = \{z : \mathrm{Im}\, z > 0\}$ thì hàm $f(z)$ = u(x,y) + iv(x,y) giải tích trên $D$.

**B)** Hàm phức $f(z)$ = u(x,y) + iv(x,y) khả vi trên miền D khi và chỉ khi các hàm u(x,y), v(x,y) khả vi và thỏa điều kiện Cauchy – Reimann trên miền D.

**C)** Nếu các hàm $u(x,y), v(x,y)$ không điều hòa trên miền D thì hàm $f(z)$ = u(x,y)+ iv(x,y) không giải tích trên miền D.

**D)** Nếu các hàm $u(x,y), v(x,y)$ điều hòa trên miền D thì hàm $f(z)$ = u(x,y)+ iv(x,y) giải tích trên miền D.

# PHẦN TỰ LUẬN (5,0 điểm)

***Câu 11*** ( *1,5điểm*) Áp dụng phép biến đổi Laplace giải phương trình vi phân

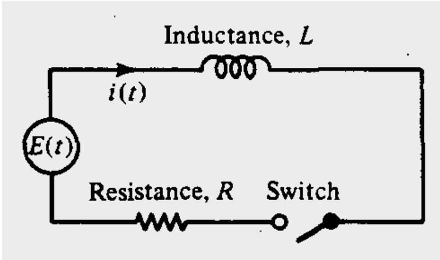
$$y''-7y'+6y=3+\cos 2t \text{ với điều kiện } y(0)=0 \text{ và } y'(0)=0$$

***Câu 12*** (1,5 *điểm*)

Cho mạch điện RL như hình vẽ thỏa phương trình vi phân

$$L\frac{di(t)}{dt}+R\,i(t) = E_o\cos 3t \;,\; \mathrm{i}(0) = 0$$

với $E_o, R, L$ là các hằng số dương.




a) Áp dụng phép biến đổi Laplace giải phương trình vi phân để tìm $i(t)$.

b) Chứng tỏ rằng sau khoảng thời gian $t$ đủ lớn nghiệm của phương trình vi phân, $i(t)$, biểu diễn xấp xỉ một dao động điều hòa theo thời gian $t$. Xác định biên độ dao động này theo $E_o, R, L$.

***Câu 13*** (2 *điểm*)

a) Áp dụng phép biến đổi Laplace giải hệ phương trình vi phân

$$\begin{cases} x'-3y=2 \\ x+y'+4y=0 \end{cases}, \text{ điều kiện } x(0)= y(0) = 0$$

b) Tính $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t)$, $\lim\limits_{t\to+\infty} y(t)$. Xác tọa độ gần đúng trong mặt phẳng $Oxy$ của điểm $M\big(x(t);y(t)\big)$ sau khoảng thời gian t đủ lớn.

**Ghi chú :** *Cán bộ coi thi không được giải thích đề thi.*

**CHUẨN ĐẦU RA**

| Nội dung kiểm tra | Chuẩn đầu ra của học phần (về kiến thức) |
|---|---|
| Từ câu 1 đến câu 10 | G1: 1.1, 1.2<br>G2: 2.1.1, 2.1.2, 2.1.3, 2.1.4 , 2.4.3 |
| Câu 11, Câu 12, Câu 13: Áp dụng phép biến đổi Laplace giải phương trình vi phân, hệ phương trình vi phân rồi ứng dụng vào đời sống. | G1: 1.1, 1.2<br>G2: 2.1.3, 2.1.3, 2.1.4 , 2.4.3 |

Ngày 7 tháng 8 năm 2017

Thông qua Bộ môn Toán

| TRƯỜNG ĐH SƯ PHẠM KỸ THUẬT TP.HCM<br>BỘ MÔN TOÁN<br>**THI CUỐI KỲ *HỌC KỲ III NĂM HỌC 2016-2017***<br>**MÔN**: **HÀM BIẾN PHỨC VÀ PHÉP BIẾN ĐỔI LAPLACE**<br>Mã đề: 0011-0808-2017-0011-0100 | | Họ, tên sinh viên: ....................................<br>Mã số sinh viên:...............................<br>Số báo danh (***STT***):........ Phòng thi: ....<br>*Thời gian* : 90 phút (8/8/2017)<br>**Lưu ý**: Sinh viên làm bài thi lần lượt trên trang 6, 5, 4,3. Đối với các hệ phương trình đại số tuyến tính thì chỉ cần ghi kết quả vào bài làm mà không cần trình bày cách giải.<br>***Sinh viên nộp lại đề thi cùng với bài làm.*** |
|---|---|---|
| ***Giám thị 1*** | ***Giám thị 2*** | |
| ***Giáo viên chấm thi 1&2*** | **ĐIỂM** | |

## BÀI LÀM PHẦN TRẮC NGHIỆM

| **Câu hỏi** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** | **9** | **10** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Trả lời** | | | | | | | | | | |

## BÀI LÀM PHẦN TỰ LUẬN

*ĐÁP ÁN MÔN*

**HÀM BIẾN PHỨC VÀ PHÉP BIẾN ĐỔI LAPLACE**

(Ngày thi: **8**/8/2017

## PHẦN TRẮC NGHIỆM

Mã đề: 0011-0808-2017-0011-0001

| **Câu hỏi** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** | **9** | **10** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Trả lời** | **A** | **B** | **C** | **D** | **A** | **B** | **C** | **D** | **B** | **D** |

Mã đề: 0011-0808-2017-0011-0010

| **Câu hỏi** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** | **9** | **10** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Trả lời** | **C** | **D** | **B** | **D** | **A** | **B** | **C** | **D** | **A** | **B** |

Mã đề: 0011-0808-2017-0011-0011

| **Câu hỏi** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** | **9** | **10** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Trả lời** | **A** | **B** | **A** | **B** | **C** | **D** | **B** | **D** | **C** | **D** |

Mã đề: 0011-0808-2017-0011-0100

| **Câu hỏi** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** | **9** | **10** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Trả lời** | **B** | **D** | **C** | **D** | **A** | **B** | **A** | **B** | **C** | **D** |

## BÀI LÀM PHẦN TỰ LUẬN

| ***Câu hỏi*** | **Nội dung** | ***Điểm*** |
|---|---|---|
| **Câu 11** | | **1,5 điểm** |
| | Áp dụng phép biến đổi Laplace giải phương trình vi phân<br>$y''-7y'+6y=3+\cos 2t$ với điều kiện $y(0)=0$ và $y'(0)=0$<br><br>Đặt $Y=Y(p) = \mathscr{L}[y(t)]$. Biến đổi Laplace hai vế phương trình, áp dụng tính chất tuyến tính và tính chất đạo hàm hàm gốc ta được:<br>$p^2Y-py(0)-y'(0)-7(pY-y(0))+6Y = \mathscr{L}[3+\cos 2t]$ | 0,25đ<br><br><br>0,25đ |

$\Leftrightarrow Y(p^2-7p+6)=\dfrac{3}{p}+\dfrac{p}{p^2+4}$

$\Leftrightarrow Y=\dfrac{4p^2+12}{p(p-1)(p-6)(p^2+4)}$

Phân tích thành phân thức đơn giản

$Y=\dfrac{4p^2+12}{p(p-1)(p-6)(p^2+4)}\overset{(*)}{=}\dfrac{A}{p}+\dfrac{B}{p-1}+\dfrac{C}{p-6}+\dfrac{Dp+2E}{p^2+4}$ 0,5đ

Biếi đổi Laplace ngược hai vế và áp dụng tính chất tuyến tính ta được

$y(t)=\mathscr{L}^{-1}[Y]=\mathscr{L}^{-1}[A\dfrac{1}{p}+B\dfrac{1}{p-1}+C\dfrac{1}{p-6}+D\dfrac{p}{p^2+4}+E\dfrac{2}{p^2+4}]$

$\Leftrightarrow y(t)=A+Be^{t}+Ce^{6t}+D\cos 2t+E\sin 2t$ 0,5đ

Tìm $A,B,C,D,E$ dựa vào đẳng thức:

$\dfrac{4p^2+12}{p(p-1)(p-6)(p^2+4)}\overset{(*)}{=}\dfrac{A}{p}+\dfrac{B}{p-1}+\dfrac{C}{p-6}+\dfrac{Dp+2E}{p^2+4}$

$A=\dfrac{4\times 0^2+12}{(0-1)(0-6)(0^2+4)}=\dfrac{1}{2}$, $B=\dfrac{4\times 1^2+12}{1(1-6)(1^2+4)}=-\dfrac{16}{25}$, $C=\dfrac{4\times 6^2+12}{6(6-1)(6^2+4)}=\dfrac{13}{100}$

Từ đẳng thức (*)

$$\begin{cases} Cho\quad p=2: & -\dfrac{28}{64}=\dfrac{A}{2}+\dfrac{B}{2-1}+\dfrac{C}{2-6}+\dfrac{2\times D+2E}{2^2+4}\\ Cho\quad p=3: & -\dfrac{48}{234}=\dfrac{A}{3}+\dfrac{B}{3-1}+\dfrac{C}{3-6}+\dfrac{3D+2E}{(3)^2+4}\end{cases}$$

Thay $A=\dfrac{1}{2},B=-\dfrac{16}{25},C=\dfrac{13}{100}$ vào hệ trên rồi giải tìm $D,E$ ta được

$D=\dfrac{1}{100},E=-\dfrac{7}{100}$

**Câu 12** 1,5đ

a) $Li'(t)+R\,i(t)==E_o\cos 3t$, $i(0)=0$

Đặt $\mathbf{I}=\mathbf{I}(p)=\mathscr{L}[i(t)]\Rightarrow\mathscr{L}\left[\dfrac{di}{dt}\right]=\mathscr{L}[i'(t)]=p\mathbf{I}-i(0)=p\mathbf{I}$

Biến đổi Laplace hai vế phương trình ta được

$L\mathbf{I}p+R\mathbf{I}=\dfrac{E_op}{p^2+3^2}\Leftrightarrow\mathbf{I}=\dfrac{E_op}{(p^2+3^2)(Lp+R)}$ ***0.5đ***

| | | |
|---|---|---|
| | $\Leftrightarrow \mathbf{I} = \frac{E_o}{L}\left(\frac{p}{(p^2+3^2)(p+\frac{R}{L})}\right) \Leftrightarrow \mathbf{I} = \frac{E_o}{L}\left(\frac{Ap+3B}{p^2+3^2}+\frac{C}{p+\frac{R}{L}}\right)$ | ***0.25đ*** |
| | Biến đổi ngược hai vế ta được : i(t) = $\frac{E_o}{L}\left(A\cos 3t + B\sin 3t + Ce^{-\frac{R}{L}t}\right)$ (*) | ***0.25đ*** |
| | Tìm A, B, C bằng cách xét : $\frac{p}{(p^2+3^2)(p+\frac{R}{L})} = \frac{Ap+3B}{p^2+3^2}+\frac{C}{p+\frac{R}{L}}$ (**) | |
| | ♦ Nhân hai vế của (**) với $\left(p+\frac{R}{L}\right)$ và cho $p \to -\frac{R}{L}$ ta được:<br>C = $\lim\limits_{p\to -\frac{R}{L}} \frac{p}{p^2+3^2} = \frac{-RL}{R^2+9L^2}$ | ***0.25đ*** |
| | ♦ Nhân hai vế của (**) với p và cho $p \to \infty$ ta được :<br>$0 = A + C \Rightarrow A = -C = \frac{RL}{R^2+9L^2}$ | |
| | ♦ Từ (**) cho p = 0 ta được : $0 = \frac{B}{3} + C\frac{L}{R} \Rightarrow B = -\frac{3L}{R}C = \frac{3L}{R^2+9L^2}$ | |
| | Thay A, B, C vào (*) ta được kết quả:<br>$i(t) = \frac{E_oR}{R^2+9L^2}\cos 3t + \frac{3E_o}{R^2+9L^2}\sin 3t - \frac{E_oR}{R^2+9L^2}e^{-\frac{R}{L}t}$ | |
| | b) Vì $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{-\frac{R}{L}t} = 0$ nên sau khoảng thời gian t đủ lớn | |
| | $i(t) \approx \frac{E_oR}{R^2+9L^2}\cos 3t + \frac{3E_o}{R^2+9L^2}\sin 3t = \underbrace{\frac{E_oR}{R^2+9L^2}}_{u}\cos 3t + \underbrace{\frac{3E_o}{R^2+9L^2}}_{v}\sin 3t$<br>$= u\cos 3t + v\sin 3t$<br>$= \sqrt{u^2+v^2}\left(\frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}}\cos 3t + \frac{v}{\sqrt{u^2+v^2}}\sin 3t\right)$<br>$= \sqrt{u^2+v^2}(\sin\alpha\cos 3t + \cos\alpha\sin 3t)$<br>$= \sqrt{u^2+v^2}\sin(3t+\alpha)$<br>Vậy sau khoảng thời gian t đủ lớn $i(t) \approx \sqrt{u^2+v^2}\sin(3t+\alpha)$ là dao động điều hòa có biên độ $\sqrt{u^2+v^2}$ với $u = \frac{E_oR}{R^2+9L^2}$ và $v = \frac{3E_o}{R^2+9L^2}$. | ***0.25đ*** |
| | | |
| ***Câu13*** | | ***2đ*** |
| | Đặt $X = \mathscr{L}[x], Y = \mathscr{L}[y]$; biến đổi Laplace hai vế ta được: | |

$$\begin{cases} \mathscr{L}[x'] - 3\mathscr{L}[y] = \mathscr{L}[2] \\ \mathscr{L}[x] + \mathscr{L}[y'] + 4\mathscr{L}[y] = \mathscr{L}[0] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} pX - 3Y = \dfrac{2}{p} \\ X + (p+4)Y = 0 \end{cases}$$

***0.5đ***

$$\Leftrightarrow \begin{cases} X = \dfrac{2(p+4)}{p(p+1)(p+3)} = \dfrac{A}{p} + \dfrac{B}{p+1} + \dfrac{C}{p+3} \\ Y = \dfrac{-2}{p(p+1)(p+3)} = \dfrac{D}{p} + \dfrac{E}{p+1} + \dfrac{F}{p+3} \end{cases}$$

***0.5đ***

Biến đổi ngược hai vế ta được: $\begin{cases} x = \mathscr{L}^{-1}[X] \\ y = \mathscr{L}^{-1}[Y] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \mathscr{L}^{-1}[A\dfrac{1}{p} + B\dfrac{1}{p+1} + C\dfrac{1}{p+3}] \\ y = \mathscr{L}^{-1}[D\dfrac{1}{p} + E\dfrac{1}{p+1} + F\dfrac{1}{p+3}] \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = A + Be^{-t} + Ce^{-3t} \\ y = D + Ee^{-t} + Fe^{-3t} \end{cases}$$

***0.5đ***

- Tìm $A, B, C$ dựa vào

$$\frac{2(p+4)}{p(p+1)(p+3)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p+1} + \frac{C}{p+3}$$

$$A = \frac{2(0+4)}{(0+1)(0+3)} = \frac{8}{3}, \quad B = \frac{2(-1+4)}{(-1)(-1+3)} = \frac{6}{-2} = -3, \quad C = \frac{2(-3+4)}{(-3)(-3+1)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

- Tìm $D, E, F$ dựa vào

$$\frac{-2}{p(p+1)(p+3)} = \frac{D}{p} + \frac{E}{p+1} + \frac{F}{p+3}$$

$$D = \frac{-2}{(0+1)(0+3)} = -\frac{2}{3}, \quad E = \frac{-2}{(-1)(-1+3)} = 1, \quad C = \frac{-2}{(-3)(-3+1)} = -\frac{1}{3}$$

b)

$$\lim_{t\to+\infty} x(t) = \lim_{t\to+\infty}[A + Be^{-t} + Ce^{-3t}] = A; \lim_{t\to+\infty} y(t) = \lim_{t\to+\infty}[D + Ee^{-t} + Fe^{-3t}] = D$$

Sau khoảng thời gian t đủ lớn, tọa độ gần đúng điểm $M$ là $M(\frac{8}{3};-\frac{2}{3})$.

***0.5đ***

*** HẾT***