Trường ĐH Sư phạm Kỹ thuật Tp.HCM
KHOA KHOA HỌC ỨNG DỤNG
BỘ MÔN TOÁN

ĐỀ THI CUỐI KỲ *HỌC KỲ I NĂM HỌC 2018-2019*
MÔN: ***HÀM BIẾN PHỨC VÀ PHÉP BIẾN ĐỔI LAPLACE***
Mã môn học: **MATH 121201** *Thời gian*: 90 phút (26/12/2018)
Đề thi gồm 3 trang ***Được phép sử dụng tài liệu***
Mã đề: 0100-2612-2018-0100-0000 (**Nộp lại đề này**)

PHẦN TRẮC NGHIỆM LỰA CHỌN (5,0 điểm)

(Chọn 1 trong các câu A, B, C, D rồi điền vào *BÀI LÀM PHẦN TRẮC NGHIỆM* ở trang 6)

Câu 1 Cho số phức $z = \dfrac{17}{4-i} + i^{2019} + e^{6-5i}$. Khi đó, phần thực và phần ảo của z là:

A) $\operatorname{Re} z = 4 + e^6 \cos 5$, $\operatorname{Im} z = e^6 \sin 5$
B) $\operatorname{Re} z = 4 + e^6 \cos 5$, $\operatorname{Im} z = -e^6 \sin 5$
C) $\operatorname{Re} z = 4 + e^6 \cos 5$, $\operatorname{Im} z = -2 - e^6 \sin 5$
D) $\operatorname{Re} z = 4 + e^6 \cos 5$, $\operatorname{Im} z = 2 - e^6 \sin 5$

Câu 2 Với điều kiện $a, b \in \mathbb{R}$ và $a^2 + b^2 \neq 0$, xét ***biểu diễn hình học*** của các số phức (trên cùng một mặt phẳng phức): $z_o = a + ib$, $z_1 = (a+ib)e^{\frac{2\pi}{5}i}$, $z_2 = (a+ib)e^{\frac{4\pi}{5}i}$, $z_3 = (a+ib)e^{\frac{6\pi}{5}i}$, $z_4 = (a+ib)e^{\frac{8\pi}{5}i}$, $z_5 = (a+ib)e^{\frac{10\pi}{5}i}$, $z_6 = (a+ib)e^{\frac{12\pi}{5}i}$. Khẳng định nào sau đây sai?

A) z_1, z_2, z_3, z_4, z_5 có biểu diễn hình học tương ứng với năm đỉnh một hình ngũ giác đều.
B) z_o, z_1, z_2, z_3, z_4 có biểu diễn hình học tương ứng với năm đỉnh một ngôi sao năm cánh đều.
C) $z_o, z_1, z_2, z_3, z_4, z_5$ có biểu diễn hình học cùng thuộc một đường tròn tâm là gốc tọa độ $O(0,0)$.
D) $z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6$ có biểu diễn hình học tương ứng với sáu đỉnh một lục giác đều.

Câu 3 Giả sử $\mathscr{L}$[f(t)] = F(p). Khẳng định nào sau đây **sai?**

A) $\mathscr{L}\left[\int_0^t f(u)du\right] = \dfrac{F(p)}{p}$

B) $\mathscr{L}\left[\int_0^t e^{5u} ch3u du\right] = \dfrac{p-5}{p[(p-5)^2+9]}$

C) Nếu f(t) là hàm gốc tuần hoàn với chu kỳ **T** thì F(p) = $\mathscr{L}$[f(t)] = $\dfrac{1}{1-e^{-Tp}}\int_0^T e^{-pt} f(t)dt$

D)Nếu $f(t) = \begin{cases} \sin 5t & khi \quad 0 < t < \pi \\ 0 & khi \quad \pi \le t < 3\pi \end{cases}$ và f(t+3π) = f(t) thì $\mathscr{L}$[f(t)] = $\dfrac{1}{1-e^{-3\pi p}}\int_0^\pi e^{-pt} \sin 5t dt$

Câu 4 Ảnh của đường tròn $x^2 + y^2 = 1$ qua phép biến hình w = $\dfrac{\sqrt{5}}{\bar{z}} = u + iv$ là

A) Đường tròn $u^2 + v^2 = 5$.
B) Đường tròn $u^2 + v^2 = 1$.
C) Đường tròn $u^2 + v^2 = 25$.
D) Đường thẳng $u^2 + v^2 = \sqrt{5}$.

Câu 5 Trong mặt phẳng phức, cho các hàm số $u(x, y) = 18xy - 5y + 1$ và $v(x, y) = 9y^2 - 9x^2 - 5x$. Khẳng định nào sau đây **đúng?**

A) u, v điều hòa nhưng không là các hàm điều hòa liên hợp.
B) u, v là các hàm điều hòa liên hợp.
C) u điều hòa, v không điều hòa.
D) v điều hòa, u không điều hòa

Câu 6 Khẳng định nào sau đây sai*?*

A) Nếu a là điểm bất thường cô lập của hàm $f(z)$ và $\lim_{z\to a} f(z) = \infty$, $\lim_{z\to a}(z-a)^m f(z) = A$ (với $0 \neq A \neq \infty$) thì a là cực điểm cấp m của hàm $f(z)$.

B) $z = 5i$ là cực điểm cấp 2 của hàm $f(z) = \dfrac{e^{iz} + 5z + 4}{(z-5i)^2}$

C) $\oint\limits_{|z+3i|=3} \dfrac{e^{iz}+5z+4}{(z-5i)^2}dz = 2\pi i \operatorname{Re}s[\dfrac{e^{iz}+5z+4}{(z-5i)^2}, 5i]$ **D)** $\oint\limits_{|z-3i|=6} \dfrac{e^{iz}+5z+4}{(z-5i)^2}dz = 2\pi i(ie^{-5}+5)$

Câu 7 Hàm phức f(z) = $\dfrac{8}{z}+\dfrac{\bar{z}}{|\bar{z}|^2}$ = u + iv có phần thực và phần ảo là:

A) u = $\dfrac{9x}{x^2+y^2}$, v = $\dfrac{-9y}{x^2+y^2}$

B) u = $\dfrac{9x}{x^2+y^2}$, v = $\dfrac{7y}{x^2+y^2}$

C) u = $\dfrac{9x}{x^2+y^2}$, v = $\dfrac{9y}{x^2+y^2}$

D) một kết quả khác

Câu 8 Để giải phương trình tích phân: y(t)= e^{-6t} -10 $\int\limits_0^t y(u)\cos 3(t-u)du$ ta làm như sau:

- Áp dụng tích chập, phương trình tương đương với: y(t) = e^{-6t} -10y(t)*cos3t
- Đặt Y = Y(p) = $\mathscr{L}$[y(t)] và biến đổi Laplace hai vế phương trình ta được

$$\mathscr{L}[y(t)] = \mathscr{L}[e^{-6t}] - 10\,\mathscr{L}[y(t)*\cos 3t]$$

- Áp dụng công thức Borel ta được

$$Y = \frac{1}{p+6} - 10\mathscr{L}[y(t)]\,\mathscr{L}[\cos 3t] \Leftrightarrow Y = \frac{1}{p+6} - 10Y\frac{p}{p^2+9}$$

- Giải phương trình với Y là ẩn ta được: Y = $\dfrac{p^2+9}{(p+1)(p+9)(p+6)}$
- Phân tích thành phân thức đơn giản: Y= $\dfrac{A}{p+1}+\dfrac{B}{p+9}+\dfrac{C}{p+6}$ (*với A, B, C = const mà chúng ta chưa tìm*)
- Biến đổi Laplace ngược hai vế ta được nghiệm : y(t) = $Ae^{-t}+Be^{-9t}+Ce^{-6t}$

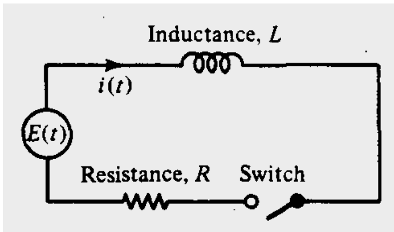
A) Cách làm sai, tính toán đúng, kết quả sai.
B) Cách làm đúng, tính toán đúng, kết quả đúng.
C) Cách làm sai, tính toán sai, kết quả sai.
D) Cách làm đúng, tính toán sai, kết quả sai.

Câu 9

Cho mạch điện RL như hình vẽ thỏa phương trình vi phân

$L\dfrac{di(t)}{dt} + R\,i(t) \overset{(1)}{=} E(t)$ với i(0) = 0 và R, L là các hằng số dương.

Trường hợp $E(t) = E_o\cos 5t$ với $E_o = const > 0$ và cần giải phương trình vi phân để tìm $i(t)$ ta làm như sau:



Đặt **I** = **I**(p) = $\mathscr{L}[\mathrm{i(t)}] \Rightarrow \mathscr{L}\left[\dfrac{di(t)}{dt}\right] = \mathscr{L}[\mathrm{i'(t)}]$ = p**I**-i(0) = p**I**

Biến đổi Laplace hai vế phương trình (1) ta được: Lp**I** +R**I** = $\dfrac{pE_o}{p^2+25}$ (2)

Giải (2) tìm **I** ta được: **I** = $\dfrac{E_o}{L}\times\dfrac{p}{(p^2+25)(p+\frac{R}{L})}$ (3)

Phân tích vế phải của (3) thành phân thức đơn giản ta được: **I** = $\dfrac{E_o}{L}\left(\dfrac{Ap+5B}{p^2+25}+\dfrac{C}{p+\frac{R}{L}}\right)$ (4),với A, B, C là các hằng số bất định mà chúng ta chưa tìm.

Biến đổi Laplace ngược hai vế của (4) ta được: $i(t) = \mathscr{L}^{-1}[I] = \frac{E_o}{L}\left(A\cos 5t + B\sin 5t + Ce^{-\frac{R}{L}t}\right)$

A)Cách làm sai, tính toán đúng, kết quả sai.
B)Cách làm đúng, tính toán sai, kết quả sai.
C)Cách làm đúng, tính toán đúng, kết quả đúng.
D)Cách làm sai, tính toán sai, kết quả sai.

<u>Câu 10</u> Cho phương trình vi phân: $y'+8y = u(t-2\pi)e^{-3(t-2\pi)}$ (1) với điều kiện ban đầu y(0) = 2.

Để giải phương trình vi phân này ta làm như sau: Đặt Y = Y(p)= $\mathscr{L}$[y(t)]

- Biến đổi Laplace hai vế phương trình (1) ta được: $pY + 8Y = \frac{e^{-2\pi p}}{p+3} + 2$ (2)
- Giải phương trình (2) với Y là ẩn ta được : Y= $\frac{e^{-2\pi p}}{(p+3)(p+8)} + \frac{2}{p+8}$ (3)
- Phân tích vế phải của (3) thành phân thức đơn giản ta được: Y = $\frac{1}{5}e^{-2\pi p}\left(\frac{1}{p+3} - \frac{1}{p+8}\right) + \frac{2}{p+8}$
- Biến đổi Laplace ngược hai vế ta được nghiệm: y = $\frac{1}{5}\left(e^{-3(t-2\pi)} - e^{-8(t-2\pi)}\right)u(t-2\pi) + 2e^{-8t}$

A)Cách làm đúng, tính toán đúng, kết quả đúng.
B)Cách làm sai, tính toán đúng, kết quả sai.
C)Cách làm sai, tính toán sai, kết quả sai.
D)Cách làm đúng, tính toán sai, kết quả sai.

PHẦN TỰ LUẬN (5,0 điểm)

<u>Câu 11</u> (1,5 *điểm*) Khai triển Laurent hàm $F(p) = e^{\frac{3}{p}} - 1$ quanh điểm bất thường cô lập $p = 0$.

Dựa vào kết quả khai triển tìm gốc hàm ảnh $F(p)$ và tính tích phân $I = \oint\limits_{|z-2i|=6}(e^{\frac{3}{z}} - 1)dz$.

<u>Câu 12</u> (1,5 *điểm*) Áp dụng phép biến đổi Laplace giải hệ phương trình vi phân

$$\begin{cases} x' - 8y = 2 \\ x + y' - 9y = e^{5t} \end{cases}$$, điều kiện x(0)= y(0) = 0

<u>Câu 13</u> (2 *điểm*) Áp dụng phép biến đổi Laplace giải phương trình vi phân

$y'' + 8y' + 15y = 4 + e^{-2t} + \sin 3t$ với điều kiện $y(0) = 0$ và $y'(0) = 0$

Chứng tỏ rằng sau khoảng thời gian t đủ lớn nghiệm của phương trình vi phân, $y(t)$, biểu diễn xấp xỉ một dao động điều hòa theo thời gian t. Xác định vị trí cân bằng và biên độ dao động này.

Ghi chú : *Cán bộ coi thi không được giải thích đề thi.*

CHUẨN ĐẦU RA

Nội dung kiểm tra	Chuẩn đầu ra của học phần (về kiến thức)
Từ câu 1 đến câu 7 và câu 11	G1: 1.1, 1.2 G2: 2.1.1, 2.1.2, 2.1.3, 2.1.4 , 2.4.3
Câu 8, 9, 10,12,13: Áp dụng phép biến đổi Laplace giải phương trình tích phân, phương trình vi phân, hệ phương trình vi phân rồi ứng dụng vào đời sống.	G1: 1.1, 1.2 G2: 2.1.3, 2.1.3, 2.1.4 , 2.4.3

Ngày 23 tháng 12 năm 2018
Thông qua Bộ môn Toán

<table>
<tr><td colspan="2">TRƯỜNG ĐH SƯ PHẠM KỸ THUẬT TP.HCM
BỘ MÔN TOÁN
THI CUỐI KỲ HỌC KỲ I NĂM HỌC 2018-2019
MÔN: HÀM BIẾN PHỨC VÀ PHÉP BIẾN ĐỔI LAPLACE
Mã đề: 0100-2612-2018-0100-0000</td><td rowspan="3">Họ, tên sinh viên: ....
Mã số sinh viên:...............................
Số báo danh (STT):........ Phòng thi: ......
Thời gian : 90 phút (26/12/2018)
Lưu ý: Sinh viên làm bài thi lần lượt trên trang 6, 5, 4,3. Đối với các hệ phương trình đại số tuyến tính thì chỉ cần ghi kết quả vào bài làm mà không cần trình bày cách giải.
Sinh viên nộp lại đề thi cùng với bài làm.</td></tr>
<tr><td>Giám thị 1</td><td>Giám thị 2</td></tr>
<tr><td>Giáo viên chấm thi 1&2</td><td>ĐIỂM</td></tr>
</table>

BÀI LÀM PHẦN TRẮC NGHIỆM

Câu hỏi	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Trả lời										

BÀI LÀM PHẦN TỰ LUẬN

Trường ĐH Sư phạm Kỹ thuật Tp.HCM
KHOA KHOA HỌC ỨNG DỤNG
BỘ MÔN TOÁN

ĐỀ THI CUỐI KỲ *HỌC KỲ I NĂM HỌC 2018-2019*
MÔN: ***HÀM BIẾN PHỨC VÀ PHÉP BIẾN ĐỔI LAPLACE***
Mã môn học: **MATH 121201** *Thời gian*: 90 phút (26/12/2018)
Đề thi gồm 3 trang **_Được phép sử dụng tài liệu_**
Mã đề: 0100-2612-2018-0100-0001 (**Nộp lại đề này**)

PHẦN TRẮC NGHIỆM LỰA CHỌN (5,0 điểm)

(Chọn 1 trong các câu A, B, C, D rồi điền vào *BÀI LÀM PHẦN TRẮC NGHIỆM* ở trang 6)

Câu 1 Hàm phức f(z) = $\frac{8}{z}+\frac{\bar{z}}{|\bar{z}|^2}$ = u + iv có phần thực và phần ảo là:

A) u = $\frac{9x}{x^2+y^2}$, v = $\frac{-9y}{x^2+y^2}$

B) u = $\frac{9x}{x^2+y^2}$, v = $\frac{7y}{x^2+y^2}$

C) u = $\frac{9x}{x^2+y^2}$, v = $\frac{9y}{x^2+y^2}$

D) một kết quả khác

Câu 2 Cho số phức z = $\frac{17}{4-i}+i^{2019}$ + e^{6-5i}. Khi đó, phần thực và phần ảo của z là:

A) $\operatorname{Re} z = 4+e^6\cos 5$, $\operatorname{Im} z = e^6\sin 5$

B) $\operatorname{Re} z = 4+e^6\cos 5$, $\operatorname{Im} z = -e^6\sin 5$

C) $\operatorname{Re} z = 4+e^6\cos 5$, $\operatorname{Im} z = -2-e^6\sin 5$

D) $\operatorname{Re} z = 4+e^6\cos 5$, $\operatorname{Im} z = 2-e^6\sin 5$

Câu 3 Với điều kiện $a,b\in\mathbb{R}$ và $a^2+b^2\neq 0$, xét ***biểu diễn hình học*** của các số phức (trên cùng một mặt phẳng phức): $z_o = a+ib$, $z_1=(a+ib)e^{\frac{2\pi}{5}i}$, $z_2=(a+ib)e^{\frac{4\pi}{5}i}$, $z_3=(a+ib)e^{\frac{6\pi}{5}i}$, $z_4=(a+ib)e^{\frac{8\pi}{5}i}$, $z_5=(a+ib)e^{\frac{10\pi}{5}i}$, $z_6=(a+ib)e^{\frac{12\pi}{5}i}$. Khẳng định nào sau đây sai?

A) z_1,z_2,z_3,z_4,z_5 có biểu diễn hình học tương ứng với năm đỉnh một hình ngũ giác đều.

B) z_o,z_1,z_2,z_3,z_4 có biểu diễn hình học tương ứng với năm đỉnh một ngôi sao năm cánh đều.

C) z_o,z_1,z_2,z_3,z_4,z_5 có biểu diễn hình học cùng thuộc một đường tròn tâm là gốc tọa độ $O(0,0)$.

D) z_1,z_2,z_3,z_4,z_5,z_6 có biểu diễn hình học tương ứng với sáu đỉnh một lục giác đều.

Câu 4 Ảnh của đường tròn $x^2+y^2=1$ qua phép biến hình w = $\frac{\sqrt{5}}{\bar{z}}=u+iv$ là

A) Đường tròn $u^2+v^2=5$.

B) Đường tròn $u^2+v^2=1$.

C) Đường tròn $u^2+v^2=25$.

D) Đường thẳng $u^2+v^2=\sqrt{5}$.

Câu 5 Trong mặt phẳng phức, cho các hàm số $u(x,y)=18xy-5y+1$ và $v(x,y)=9y^2-9x^2-5x$. Khẳng định nào sau đây **đúng?**

A) u, v điều hòa nhưng không là các hàm điều hòa liên hợp.

B) u, v là các hàm điều hòa liên hợp.

C) u điều hòa, v không điều hòa.

D) v điều hòa, u không điều hòa

Câu 6 Khẳng định nào sau đây sai*?*

A) Nếu a là điểm bất thường cô lập của hàm $f(z)$ và $\lim\limits_{z\to a} f(z)=\infty$, $\lim\limits_{z\to a}(z-a)^m f(z)=A$ (với $0\neq A\neq\infty$) thì a là cực điểm cấp m của hàm $f(z)$.

B) $z=5i$ là cực điểm cấp 2 của hàm $f(z)=\dfrac{e^{iz}+5z+4}{(z-5i)^2}$

C) $\displaystyle\oint_{|z+3i|=3}\frac{e^{iz}+5z+4}{(z-5i)^2}dz = 2\pi i\operatorname{Res}[\frac{e^{iz}+5z+4}{(z-5i)^2},5i]$

D) $\displaystyle\oint_{|z-3i|=6}\frac{e^{iz}+5z+4}{(z-5i)^2}dz = 2\pi i(ie^{-5}+5)$

Câu 7 Giả sử $\mathscr{L}$[f(t)] = F(p). Khẳng định nào sau đây **sai?**

A) $\mathscr{L}\left[\int_0^t f(u)du\right] = \dfrac{F(p)}{p}$ **B)** $\mathscr{L}\left[\int_0^t e^{5u}ch3udu\right] = \dfrac{p-5}{p[(p-5)^2+9]}$

C) Nếu f(t) là hàm gốc tuần hoàn với chu kỳ **T** thì F(p) = $\mathscr{L}$[f(t)] = $\dfrac{1}{1-e^{-Tp}}\int_0^T e^{-pt} f(t)dt$

D)Nếu $f(t) = \begin{cases} \sin 5t & khi \quad 0 < t < \pi \\ 0 & khi \quad \pi \le t < 3\pi \end{cases}$ và f(t+3π) = f(t) thì $\mathscr{L}$[f(t)] = $\dfrac{1}{1-e^{-3\pi p}}\int_0^{\pi} e^{-pt} \sin 5tdt$

Câu 8 Cho phương trình vi phân: $y'+8y = u(t-2\pi)e^{-3(t-2\pi)}$ (1) với điều kiện ban đầu y(0) = 2.
Để giải phương trình vi phân này ta làm như sau: Đặt Y = Y(p)= $\mathscr{L}$[y(t)]

- ♦ Biến đổi Laplace hai vế phương trình (1) ta được: $pY + 8Y = \dfrac{e^{-2\pi p}}{p+3} + 2$ (2)
- ♦ Giải phương trình (2) với Y là ẩn ta được : Y= $\dfrac{e^{-2\pi p}}{(p+3)(p+8)} + \dfrac{2}{p+8}$ (3)
- ♦ Phân tích vế phải của (3) thành phân thức đơn giản ta được: Y = $\dfrac{1}{5}e^{-2\pi p}\left(\dfrac{1}{p+3} - \dfrac{1}{p+8}\right) + \dfrac{2}{p+8}$
- ♦ Biến đổi Laplace ngược hai vế ta được nghiệm: y = $\dfrac{1}{5}\left(e^{-3(t-2\pi)} - e^{-8(t-2\pi}\right)u(t-2\pi) + 2e^{-8t}$

A)Cách làm đúng, tính toán đúng, kết quả đúng.
B)Cách làm sai, tính toán đúng, kết quả sai.
C)Cách làm sai, tính toán sai, kết quả sai.
D)Cách làm đúng, tính toán sai, kết quả sai.

Câu 9 Để giải phương trình tích phân: y(t)= e^{-6t} -10 $\int_0^t y(u)\cos 3(t-u)du$ ta làm như sau:

- ♦ Áp dụng tích chập, phương trình tương đương với: y(t) = e^{-6t} -10y(t)*cos3t
- ♦ Đặt Y = Y(p) = $\mathscr{L}$[y(t)] và biến đổi Laplace hai vế phương trình ta được

$$\mathscr{L}[y(t)] = \mathscr{L}[e^{-6t}] - 10\,\mathscr{L}[y(t)*\cos 3t]$$

- ♦ Áp dụng công thức Borel ta được

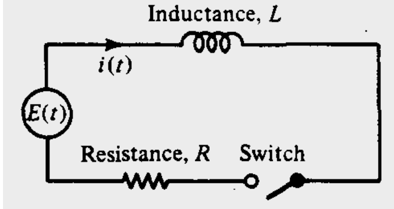
$$Y = \frac{1}{p+6} - 10\mathscr{L}[y(t)]\,\mathscr{L}[\cos 3t] \Leftrightarrow Y = \frac{1}{p+6} - 10Y\frac{p}{p^2+9}$$

- ♦ Giải phương trình với Y là ẩn ta được: Y = $\dfrac{p^2+9}{(p+1)(p+9)(p+6)}$
- ♦ Phân tích thành phân thức đơn giản: Y= $\dfrac{A}{p+1} + \dfrac{B}{p+9} + \dfrac{C}{p+6}$ (*với A, B, C = const mà chúng ta chưa tìm*)
- ♦ Biến đổi Laplace ngược hai vế ta được nghiệm : y(t) = $Ae^{-t} + Be^{-9t} + Ce^{-6t}$

A) Cách làm sai, tính toán đúng, kết quả sai.
B) Cách làm đúng, tính toán đúng, kết quả đúng.
C) Cách làm sai, tính toán sai, kết quả sai.
D) Cách làm đúng, tính toán sai, kết quả sai.

Câu 10

Cho mạch điện RL như hình vẽ thỏa phương trình vi phân
$L\dfrac{di(t)}{dt} + R\, i(t) \overset{(1)}{=} E(t)$ với i(0) = 0 và R, L là các hằng số dương.
Trường hợp $E(t) = E_o \cos 5t$ với $E_o = const > 0$ và cần giải phương trình vi phân để tìm $i(t)$ ta làm như sau:



Đặt **I** = **I**(p) = $\mathscr{L}[i(t)] \Rightarrow \mathscr{L}\left[\dfrac{di(t)}{dt}\right] = \mathscr{L}[i'(t)]$ = p**I**-i(0) = p**I**

Biến đổi Laplace hai vế phương trình (1) ta được: Lp**I** +R**I** = $\dfrac{pE_o}{p^2+25}$ (2)

Giải (2) tìm **I** ta được: **I** = $\dfrac{E_o}{L}\times\dfrac{p}{(p^2+25)(p+\frac{R}{L})}$ (3)

Phân tích vế phải của (3) thành phân thức đơn giản ta được: **I** = $\dfrac{E_o}{L}\left(\dfrac{Ap+5B}{p^2+25}+\dfrac{C}{p+\frac{R}{L}}\right)$ (4),với A,B,C là các hằng số bất định mà chúng ta chưa tìm.

Biến đổi Laplace ngược hai vế của (4) ta được: $i(t) = \mathscr{L}^{-1}[I] = \dfrac{E_o}{L}\left(A\cos 5t + B\sin 5t + Ce^{-\frac{R}{L}t}\right)$

A)Cách làm sai, tính toán đúng, kết quả sai.
B)Cách làm đúng, tính toán sai, kết quả sai.
C)Cách làm đúng, tính toán đúng, kết quả đúng.
D)Cách làm sai, tính toán sai, kết quả sai.

PHẦN TỰ LUẬN (5,0 điểm)

Câu 11 (*1,5 điểm*) Khai triển Laurent hàm $F(p)=e^{\frac{3}{p}}-1$ quanh điểm bất thường cô lập $p=0$. Dựa vào kết quả khai triển tìm gốc hàm ảnh $F(p)$ và tính tích phân $I=\oint\limits_{|z-2i|=6}(e^{\frac{3}{z}}-1)dz$.

Câu 12 (*1,5 điểm*) Áp dụng phép biến đổi Laplace giải hệ phương trình vi phân

$$\begin{cases} x'-8y=2 \\ x+y'-9y=e^{5t} \end{cases}$$, điều kiện x(0)= y(0) = 0

Câu 13 (*2 điểm*) Áp dụng phép biến đổi Laplace giải phương trình vi phân

$$y''+8y'+15y=4+e^{-2t}+\sin 3t \text{ với điều kiện } y(0)=0 \text{ và } y'(0)=0$$

Chứng tỏ rằng sau khoảng thời gian t đủ lớn nghiệm của phương trình vi phân, $y(t)$, biểu diễn xấp xỉ một dao động điều hòa theo thời gian t. Xác định vị trí cân bằng và biên độ dao động này.

Ghi chú : *Cán bộ coi thi không được giải thích đề thi.*

CHUẨN ĐẦU RA

Nội dung kiểm tra	Chuẩn đầu ra của học phần (về kiến thức)
Từ câu 1 đến câu 7 và câu 11	G1: 1.1, 1.2 G2: 2.1.1, 2.1.2, 2.1.3, 2.1.4 , 2.4.3
Câu 8, 9, 10,12,13: Áp dụng phép biến đổi Laplace giải phương trình tích phân, phương trình vi phân, hệ phương trình vi phân rồi ứng dụng vào đời sống.	G1: 1.1, 1.2 G2: 2.1.3, 2.1.3, 2.1.4 , 2.4.3

Ngày 23 tháng 12 năm 2018
Thông qua Bộ môn Toán

<table>
<tr><td colspan="2">TRƯỜNG ĐH SƯ PHẠM KỸ THUẬT TP.HCM
BỘ MÔN TOÁN
THI CUỐI KỲ HỌC KỲ I NĂM HỌC 2018-2019
MÔN: HÀM BIẾN PHỨC VÀ PHÉP BIẾN ĐỔI LAPLACE
Mã đề: 0100-2612-2018-0100-0001</td><td rowspan="3">Họ, tên sinh viên: ....
Mã số sinh viên:...............................
Số báo danh (STT):........ Phòng thi: ......
Thời gian : 90 phút (26/12/2018)
Lưu ý: Sinh viên làm bài thi lần lượt trên trang 6, 5, 4,3. Đối với các hệ phương trình đại số tuyến tính thì chỉ cần ghi kết quả vào bài làm mà không cần trình bày cách giải.
Sinh viên nộp lại đề thi cùng với bài làm.</td></tr>
<tr><td>Giám thị 1</td><td>Giám thị 2</td></tr>
<tr><td>Giáo viên chấm thi 1&2</td><td>ĐIỂM</td></tr>
</table>

BÀI LÀM PHẦN TRẮC NGHIỆM

Câu hỏi	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Trả lời										

BÀI LÀM PHẦN TỰ LUẬN

Trường ĐH Sư phạm Kỹ thuật Tp.HCM
KHOA KHOA HỌC ỨNG DỤNG
BỘ MÔN TOÁN

ĐỀ THI CUỐI KỲ *HỌC KỲ I NĂM HỌC 2018-2019*
MÔN: ***HÀM BIẾN PHỨC VÀ PHÉP BIẾN ĐỔI LAPLACE***
Mã môn học: **MATH 121201** *Thời gian*: 90 phút (26/12/2018)
Đề thi gồm 3 trang ***Được phép sử dụng tài liệu***
Mã đề: 0100-2612-2018-0100-0010 (**Nộp lại đề này**)

PHẦN TRẮC NGHIỆM LỰA CHỌN (5,0 điểm)

(Chọn 1 trong các câu A, B, C, D rồi điền vào *BÀI LÀM PHẦN TRẮC NGHIỆM* ở trang 6)

Câu 1 Ảnh của đường tròn $x^2+y^2=1$ qua phép biến hình w = $\frac{\sqrt{5}}{\bar{z}}=u+iv$ là

A) Đường tròn $u^2+v^2=5$.
B) Đường tròn $u^2+v^2=1$.
C) Đường tròn $u^2+v^2=25$.
D) Đường thẳng $u^2+v^2=\sqrt{5}$.

Câu 2 Trong mặt phẳng phức, cho các hàm số $u(x,y)=18xy-5y+1$ và $v(x,y)=9y^2-9x^2-5x$. Khẳng định nào sau đây **đúng?**

A) u, v điều hòa nhưng không là các hàm điều hòa liên hợp.
B) u, v là các hàm điều hòa liên hợp.
C) u điều hòa, v không điều hòa.
D) v điều hòa, u không điều hòa

Câu 3 Khẳng định nào sau đây sai*?*

A) Nếu a là điểm bất thường cô lập của hàm $f(z)$ và $\lim\limits_{z\to a} f(z)=\infty$, $\lim\limits_{z\to a}(z-a)^m f(z)=A$ (với $0\neq A\neq\infty$) thì a là cực điểm cấp m của hàm $f(z)$.

B) $z=5i$ là cực điểm cấp 2 của hàm $f(z)=\dfrac{e^{iz}+5z+4}{(z-5i)^2}$

C) $\oint\limits_{|z+3i|=3}\dfrac{e^{iz}+5z+4}{(z-5i)^2}dz=2\pi i\operatorname{Res}[\dfrac{e^{iz}+5z+4}{(z-5i)^2},5i]$

D) $\oint\limits_{|z-3i|=6}\dfrac{e^{iz}+5z+4}{(z-5i)^2}dz=2\pi i(ie^{-5}+5)$

Câu 4 Hàm phức f(z) = $\frac{8}{z}+\frac{\bar{z}}{|\bar{z}|^2}$ = u + iv có phần thực và phần ảo là:

A) u = $\dfrac{9x}{x^2+y^2}$, v = $\dfrac{-9y}{x^2+y^2}$
B) u = $\dfrac{9x}{x^2+y^2}$, v = $\dfrac{7y}{x^2+y^2}$
C) u = $\dfrac{9x}{x^2+y^2}$, v = $\dfrac{9y}{x^2+y^2}$
D) một kết quả khác

Câu 5 Cho số phức z = $\frac{17}{4-i}+i^{2019}$ + e^{6-5i}. Khi đó, phần thực và phần ảo của z là:

A) $\operatorname{Re}z=4+e^6\cos5$, $\operatorname{Im}z=e^6\sin5$
B) $\operatorname{Re}z=4+e^6\cos5$, $\operatorname{Im}z=-e^6\sin5$
C) $\operatorname{Re}z=4+e^6\cos5$, $\operatorname{Im}z=-2-e^6\sin5$
D) $\operatorname{Re}z=4+e^6\cos5$, $\operatorname{Im}z=2-e^6\sin5$

Câu 6 Với điều kiện $a,b\in\mathbb{R}$ và $a^2+b^2\neq0$, xét ***biểu diễn hình học*** của các số phức (trên cùng một mặt phẳng phức): $z_o=a+ib$, $z_1=(a+ib)e^{\frac{2\pi}{5}i}$, $z_2=(a+ib)e^{\frac{4\pi}{5}i}$, $z_3=(a+ib)e^{\frac{6\pi}{5}i}$, $z_4=(a+ib)e^{\frac{8\pi}{5}i}$, $z_5=(a+ib)e^{\frac{10\pi}{5}i}$, $z_6=(a+ib)e^{\frac{12\pi}{5}i}$. Khẳng định nào sau đây sai?

A) z_1,z_2,z_3,z_4,z_5 có biểu diễn hình học tương ứng với năm đỉnh một hình ngũ giác đều.
B) z_o,z_1,z_2,z_3,z_4 có biểu diễn hình học tương ứng với năm đỉnh một ngôi sao năm cánh đều.
C) z_o,z_1,z_2,z_3,z_4,z_5 có biểu diễn hình học cùng thuộc một đường tròn tâm là gốc tọa độ $O(0,0)$.
D) z_1,z_2,z_3,z_4,z_5,z_6 có biểu diễn hình học tương ứng với sáu đỉnh một lục giác đều.

Câu 7 Giả sử $\mathscr{L}$[f(t)] = F(p). Khẳng định nào sau đây **sai?**

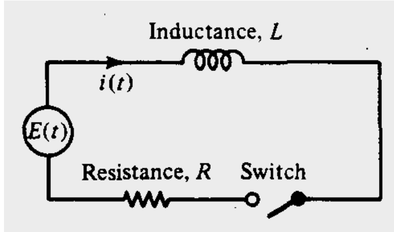
A) $\mathscr{L}\left[\int_0^t f(u)du\right] = \dfrac{F(p)}{p}$ **B)** $\mathscr{L}\left[\int_0^t e^{5u}ch3udu\right] = \dfrac{p-5}{p[(p-5)^2+9]}$

C) Nếu f(t) là hàm gốc tuần hoàn với chu kỳ **T** thì F(p) = $\mathscr{L}$[f(t)] = $\dfrac{1}{1-e^{-Tp}}\int_0^T e^{-pt}f(t)dt$

D)Nếu $f(t) = \begin{cases} \sin 5t & khi \quad 0 < t < \pi \\ 0 & khi \quad \pi \le t < 3\pi \end{cases}$ và f(t+3π) = f(t) thì $\mathscr{L}$[f(t)] = $\dfrac{1}{1-e^{-3\pi p}}\int_0^\pi e^{-pt}\sin 5tdt$

Câu 8

Cho mạch điện RL như hình vẽ thỏa phương trình vi phân $L\dfrac{di(t)}{dt} + R\ i(t) \overset{(1)}{=} E(t)$ với i(0) = 0 và R, L là các hằng số dương.



Trường hợp $E(t) = E_o\cos 5t$ với $E_o = const > 0$ và cần giải phương trình vi phân để tìm $i(t)$ ta làm như sau:

Đặt **I** = **I**(p) = $\mathscr{L}\left[i(t)\right] \Rightarrow \mathscr{L}\left[\dfrac{di(t)}{dt}\right] = \mathscr{L}\left[i'(t)\right]$ = p**I**-i(0) = p**I**

Biến đổi Laplace hai vế phương trình (1) ta được: Lp**I** +R**I** = $\dfrac{pE_o}{p^2+25}$ (2)

Giải (2) tìm **I** ta được: **I** = $\dfrac{E_o}{L}\times\dfrac{p}{(p^2+25)(p+\frac{R}{L})}$ (3)

Phân tích vế phải của (3) thành phân thức đơn giản ta được: **I** = $\dfrac{E_o}{L}\left(\dfrac{Ap+5B}{p^2+25} + \dfrac{C}{p+\frac{R}{L}}\right)$ (4),với A, B, C là các hằng số bất định mà chúng ta chưa tìm.

Biến đổi Laplace ngược hai vế của (4) ta được: $i(t) = \mathscr{L}^{-1}\left[I\right] = \dfrac{E_o}{L}\left(A\cos 5t + B\sin 5t + Ce^{-\frac{R}{L}t}\right)$

A)Cách làm sai, tính toán đúng, kết quả sai.
B)Cách làm đúng, tính toán sai, kết quả sai.
C)Cách làm đúng, tính toán đúng, kết quả đúng.
D)Cách làm sai, tính toán sai, kết quả sai.

Câu 9 Cho phương trình vi phân: $y'+8y = u(t-2\pi)e^{-3(t-2\pi)}$ (1) với điều kiện ban đầu y(0) = 2.
Để giải phương trình vi phân này ta làm như sau: Đặt Y = Y(p)= $\mathscr{L}$[y(t)]

- Biến đổi Laplace hai vế phương trình (1) ta được: $pY + 8Y = \dfrac{e^{-2\pi p}}{p+3} + 2$ (2)
- Giải phương trình (2) với Y là ẩn ta được : Y= $\dfrac{e^{-2\pi p}}{(p+3)(p+8)} + \dfrac{2}{p+8}$ (3)
- Phân tích vế phải của (3) thành phân thức đơn giản ta được: Y = $\dfrac{1}{5}e^{-2\pi p}\left(\dfrac{1}{p+3} - \dfrac{1}{p+8}\right) + \dfrac{2}{p+8}$
- Biến đổi Laplace ngược hai vế ta được nghiệm: y = $\dfrac{1}{5}\left(e^{-3(t-2\pi)} - e^{-8(t-2\pi)}\right)u(t-2\pi) + 2e^{-8t}$

A)Cách làm đúng, tính toán đúng, kết quả đúng.
B)Cách làm sai, tính toán đúng, kết quả sai.
C)Cách làm sai, tính toán sai, kết quả sai.
D)Cách làm đúng, tính toán sai, kết quả sai.

Câu 10 Để giải phương trình tích phân: y(t)= e^{-6t} -10 $\int_0^t y(u)\cos 3(t-u)du$ ta làm như sau:

- Áp dụng tích chập, phương trình tương đương với: y(t) = e^{-6t} -10y(t)*cos3t
- Đặt Y = Y(p) = $\mathscr{L}$[y(t)] và biến đổi Laplace hai vế phương trình ta được

$$\mathscr{L}[y(t)] = \mathscr{L}[e^{-6t}] - 10\,\mathscr{L}[y(t)*\cos 3t]$$

- Áp dụng công thức Borel ta được

$$Y = \frac{1}{p+6} - 10\mathscr{L}[y(t)]\,\mathscr{L}[\cos 3t] \Leftrightarrow Y = \frac{1}{p+6} - 10Y\frac{p}{p^2+9}$$

- Giải phương trình với Y là ẩn ta được: Y = $\dfrac{p^2+9}{(p+1)(p+9)(p+6)}$
- Phân tích thành phân thức đơn giản: Y= $\dfrac{A}{p+1}+\dfrac{B}{p+9}+\dfrac{C}{p+6}$ (*với A, B, C = const mà chúng ta chưa tìm*)
- Biến đổi Laplace ngược hai vế ta được nghiệm : y(t) = $Ae^{-t}+Be^{-9t}+Ce^{-6t}$

A) Cách làm sai, tính toán đúng, kết quả sai.
B) Cách làm đúng, tính toán đúng, kết quả đúng.
C) Cách làm sai, tính toán sai, kết quả sai.
D) Cách làm đúng, tính toán sai, kết quả sai.

PHẦN TỰ LUẬN (5,0 điểm)

Câu 11 (1,5 *điểm*) Khai triển Laurent hàm $F(p)=e^{\frac{3}{p}}-1$ quanh điểm bất thường cô lập $p=0$.

Dựa vào kết quả khai triển tìm gốc hàm ảnh $F(p)$ và tính tích phân $I=\oint_{|z-2i|=6}(e^{\frac{3}{z}}-1)dz$.

Câu 12 (1,5 *điểm*) Áp dụng phép biến đổi Laplace giải hệ phương trình vi phân

$$\begin{cases} x'-8y=2 \\ x+y'-9y=e^{5t} \end{cases}, \text{ điều kiện } x(0)=y(0)=0$$

Câu 13 (2 *điểm*) Áp dụng phép biến đổi Laplace giải phương trình vi phân

$$y''+8y'+15y=4+e^{-2t}+\sin 3t \quad \text{với điều kiện } y(0)=0 \text{ và } y'(0)=0$$

Chứng tỏ rằng sau khoảng thời gian t đủ lớn nghiệm của phương trình vi phân, $y(t)$, biểu diễn xấp xỉ một dao động điều hòa theo thời gian t. Xác định vị trí cân bằng và biên độ dao động này.

Ghi chú : *Cán bộ coi thi không được giải thích đề thi.*

CHUẨN ĐẦU RA

Nội dung kiểm tra	Chuẩn đầu ra của học phần (về kiến thức)
Từ câu 1 đến câu 7 và câu 11	G1: 1.1, 1.2 G2: 2.1.1, 2.1.2, 2.1.3, 2.1.4 , 2.4.3
Câu 8, 9, 10,12,13: Áp dụng phép biến đổi Laplace giải phương trình tích phân, phương trình vi phân, hệ phương trình vi phân rồi ứng dụng vào đời sống.	G1: 1.1, 1.2 G2: 2.1.3, 2.1.3, 2.1.4 , 2.4.3

Ngày 23 tháng 12 năm 2018
Thông qua Bộ môn Toán

<table>
<tr><td colspan="2">TRƯỜNG ĐH SƯ PHẠM KỸ THUẬT TP.HCM
BỘ MÔN TOÁN
THI CUỐI KỲ HỌC KỲ I NĂM HỌC 2018-2019
MÔN: HÀM BIẾN PHỨC VÀ PHÉP BIẾN ĐỔI LAPLACE
Mã đề: 0100-2612-2018-0100-0010</td><td rowspan="3">Họ, tên sinh viên: ....
Mã số sinh viên:...............................
Số báo danh (STT):........ Phòng thi: ......
Thời gian : 90 phút (26/12/2018)
Lưu ý: Sinh viên làm bài thi lần lượt trên trang 6, 5, 4,3. Đối với các hệ phương trình đại số tuyến tính thì chỉ cần ghi kết quả vào bài làm mà không cần trình bày cách giải.
Sinh viên nộp lại đề thi cùng với bài làm.</td></tr>
<tr><td>Giám thị 1</td><td>Giám thị 2</td></tr>
<tr><td>Giáo viên chấm thi 1&2</td><td>ĐIỂM</td></tr>
</table>

BÀI LÀM PHẦN TRẮC NGHIỆM

Câu hỏi	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Trả lời										

BÀI LÀM PHẦN TỰ LUẬN

Trường ĐH Sư phạm Kỹ thuật Tp.HCM
KHOA KHOA HỌC ỨNG DỤNG
BỘ MÔN TOÁN

ĐỀ THI CUỐI KỲ *HỌC KỲ I NĂM HỌC 2018-2019*
MÔN: ***HÀM BIẾN PHỨC VÀ PHÉP BIẾN ĐỔI LAPLACE***
Mã môn học: **MATH 121201** *Thời gian*: 90 phút (26/12/2018)
Đề thi gồm 3 trang ***Được phép sử dụng tài liệu***
Mã đề: 0100-2612-2018-0100-0011 (**Nộp lại đề này**)

PHẦN TRẮC NGHIỆM LỰA CHỌN (5,0 điểm)

(Chọn 1 trong các câu A, B, C, D rồi điền vào *BÀI LÀM PHẦN TRẮC NGHIỆM* ở trang 6)

Câu 1 Với điều kiện $a,b\in\mathbb{R}$ và $a^2+b^2\neq 0$, xét ***biểu diễn hình học*** của các số phức (trên cùng một mặt phẳng phức): $z_o=a+ib$, $z_1=(a+ib)e^{\frac{2\pi}{5}i}$, $z_2=(a+ib)e^{\frac{4\pi}{5}i}$, $z_3=(a+ib)e^{\frac{6\pi}{5}i}$, $z_4=(a+ib)e^{\frac{8\pi}{5}i}$, $z_5=(a+ib)e^{\frac{10\pi}{5}i}$, $z_6=(a+ib)e^{\frac{12\pi}{5}i}$. Khẳng định nào sau đây sai?

A) z_1,z_2,z_3,z_4,z_5 có biểu diễn hình học tương ứng với năm đỉnh một hình ngũ giác đều.

B) z_o,z_1,z_2,z_3,z_4 có biểu diễn hình học tương ứng với năm đỉnh một ngôi sao năm cánh đều.

C) z_o,z_1,z_2,z_3,z_4,z_5 có biểu diễn hình học cùng thuộc một đường tròn tâm là gốc tọa độ $O(0,0)$.

D) z_1,z_2,z_3,z_4,z_5,z_6 có biểu diễn hình học tương ứng với sáu đỉnh một lục giác đều.

Câu 2 Ảnh của đường tròn $x^2+y^2=1$ qua phép biến hình $w=\frac{\sqrt{5}}{\bar{z}}=u+iv$ là

A) Đường tròn $u^2+v^2=5$.
C) Đường tròn $u^2+v^2=25$.
B) Đường tròn $u^2+v^2=1$.
D) Đường thẳng $u^2+v^2=\sqrt{5}$.

Câu 3 Trong mặt phẳng phức, cho các hàm số $u(x,y)=18xy-5y+1$ và $v(x,y)=9y^2-9x^2-5x$. Khẳng định nào sau đây **đúng?**

A) u, v điều hòa nhưng không là các hàm điều hòa liên hợp.
B) u, v là các hàm điều hòa liên hợp.
C) u điều hòa, v không điều hòa.
D) v điều hòa, u không điều hòa

Câu 4 Hàm phức $f(z)=\frac{8}{z}+\frac{\bar{z}}{|\bar{z}|^2}=u+iv$ có phần thực và phần ảo là:

A) $u=\frac{9x}{x^2+y^2}$, $v=\frac{-9y}{x^2+y^2}$
B) $u=\frac{9x}{x^2+y^2}$, $v=\frac{7y}{x^2+y^2}$
C) $u=\frac{9x}{x^2+y^2}$, $v=\frac{9y}{x^2+y^2}$
D) một kết quả khác

Câu 5 Cho số phức $z=\frac{17}{4-i}+i^{2019}+e^{6-5i}$. Khi đó, phần thực và phần ảo của z là:

A) $\operatorname{Re}z=4+e^6\cos 5$, $\operatorname{Im}z=e^6\sin 5$
B) $\operatorname{Re}z=4+e^6\cos 5$, $\operatorname{Im}z=-e^6\sin 5$
C) $\operatorname{Re}z=4+e^6\cos 5$, $\operatorname{Im}z=-2-e^6\sin 5$
D) $\operatorname{Re}z=4+e^6\cos 5$, $\operatorname{Im}z=2-e^6\sin 5$

Câu 6 Khẳng định nào sau đây sai?

A) Nếu a là điểm bất thường cô lập của hàm $f(z)$ và $\lim\limits_{z\to a}f(z)=\infty$, $\lim\limits_{z\to a}(z-a)^m f(z)=A$ (với $0\neq A\neq\infty$) thì a là cực điểm cấp m của hàm $f(z)$.

B) $z=5i$ là cực điểm cấp 2 của hàm $f(z)=\frac{e^{iz}+5z+4}{(z-5i)^2}$

C) $\oint\limits_{|z+3i|=3}\frac{e^{iz}+5z+4}{(z-5i)^2}dz=2\pi i\operatorname{Res}[\frac{e^{iz}+5z+4}{(z-5i)^2},5i]$

D) $\oint\limits_{|z-3i|=6}\frac{e^{iz}+5z+4}{(z-5i)^2}dz=2\pi i(ie^{-5}+5)$

Câu 7 Giả sử $\mathscr{L}$[f(t)] = F(p). Khẳng định nào sau đây **sai?**

A) $\mathscr{L}\left[\int_0^t f(u)du\right] = \dfrac{F(p)}{p}$ **B)** $\mathscr{L}\left[\int_0^t e^{5u} ch3u du\right] = \dfrac{p-5}{p[(p-5)^2+9]}$

C) Nếu f(t) là hàm gốc tuần hoàn với chu kỳ **T** thì F(p) = $\mathscr{L}$[f(t)] = $\dfrac{1}{1-e^{-Tp}}\int_0^T e^{-pt} f(t)dt$

D)Nếu $f(t) = \begin{cases} \sin 5t & khi \quad 0 < t < \pi \\ 0 & khi \quad \pi \le t < 3\pi \end{cases}$ và f(t+3π) = f(t) thì $\mathscr{L}$[f(t)] = $\dfrac{1}{1-e^{-3\pi p}}\int_0^{\pi} e^{-pt} \sin 5t dt$

Câu 8 Để giải phương trình tích phân: y(t)= e^{-6t} -10 $\int_0^t y(u)\cos 3(t-u)du$ ta làm như sau:

- Áp dụng tích chập, phương trình tương đương với: y(t) = e^{-6t} -10y(t)*cos3t
- Đặt Y = Y(p) = $\mathscr{L}$[y(t)] và biến đổi Laplace hai vế phương trình ta được
$$\mathscr{L}[y(t)] = \mathscr{L}[e^{-6t}] - 10\, \mathscr{L}[y(t)*\cos 3t]$$
- Áp dụng công thức Borel ta được
$$Y = \frac{1}{p+6} - 10\mathscr{L}[y(t)]\,\mathscr{L}[\cos 3t] \Leftrightarrow Y = \frac{1}{p+6} - 10Y\frac{p}{p^2+9}$$
- Giải phương trình với Y là ẩn ta được: Y = $\dfrac{p^2+9}{(p+1)(p+9)(p+6)}$
- Phân tích thành phân thức đơn giản: Y= $\dfrac{A}{p+1}+\dfrac{B}{p+9}+\dfrac{C}{p+6}$ (*với A, B, C = const mà chúng ta chưa tìm*)
- Biến đổi Laplace ngược hai vế ta được nghiệm : y(t) = $Ae^{-t}+Be^{-9t}+Ce^{-6t}$

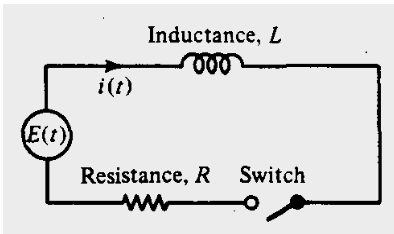
A) Cách làm sai, tính toán đúng, kết quả sai.
B) Cách làm đúng, tính toán đúng, kết quả đúng.
C) Cách làm sai, tính toán sai, kết quả sai.
D) Cách làm đúng, tính toán sai, kết quả sai.

Câu 9

Cho mạch điện RL như hình vẽ thỏa phương trình vi phân

$L\dfrac{di(t)}{dt} + R\, i(t) \overset{(1)}{=} E(t)$ với i(0) = 0 và R, L là các hằng số dương.

Trường hợp $E(t) = E_o \cos 5t$ với $E_o = const > 0$ và cần giải phương trình vi phân để tìm $i(t)$ ta làm như sau:



Đặt **I** = **I**(p) = $\mathscr{L}[i(t)] \Rightarrow \mathscr{L}\left[\dfrac{di(t)}{dt}\right] = \mathscr{L}[i'(t)]$ = p**I**-i(0) = p**I**

Biến đổi Laplace hai vế phương trình (1) ta được: Lp**I** +R**I** = $\dfrac{pE_o}{p^2+25}$ (2)

Giải (2) tìm **I** ta được: **I** = $\dfrac{E_o}{L} \times \dfrac{p}{(p^2+25)(p+\frac{R}{L})}$ (3)

Phân tích vế phải của (3) thành phân thức đơn giản ta được: **I** = $\dfrac{E_o}{L}\left(\dfrac{Ap+5B}{p^2+25}+\dfrac{C}{p+\frac{R}{L}}\right)$ (4),với A, B, C là các hằng số bất định mà chúng ta chưa tìm.

Biến đổi Laplace ngược hai vế của (4) ta được: $i(t) = \mathscr{L}^{-1}[I] = \dfrac{E_o}{L}\left(A\cos 5t + B\sin 5t + Ce^{-\frac{R}{L}t}\right)$

A)Cách làm sai, tính toán đúng, kết quả sai.
B)Cách làm đúng, tính toán sai, kết quả sai.
C)Cách làm đúng, tính toán đúng, kết quả đúng.
D)Cách làm sai, tính toán sai, kết quả sai.

<u>Câu 10</u> Cho phương trình vi phân: $y'+8y = u(t-2\pi)e^{-3(t-2\pi)}$ (1) với điều kiện ban đầu y(0) = 2.
Để giải phương trình vi phân này ta làm như sau: Đặt Y = Y(p)= $\mathscr{L}$[y(t)]

- Biến đổi Laplace hai vế phương trình (1) ta được: $pY+8Y = \dfrac{e^{-2\pi p}}{p+3} + 2$ (2)
- Giải phương trình (2) với Y là ẩn ta được : Y= $\dfrac{e^{-2\pi p}}{(p+3)(p+8)} + \dfrac{2}{p+8}$ (3)
- Phân tích vế phải của (3) thành phân thức đơn giản ta được: Y = $\dfrac{1}{5}e^{-2\pi p}\left(\dfrac{1}{p+3}-\dfrac{1}{p+8}\right)+\dfrac{2}{p+8}$
- Biến đổi Laplace ngược hai vế ta được nghiệm: y = $\dfrac{1}{5}\left(e^{-3(t-2\pi)} - e^{-8(t-2\pi}\right)u(t-2\pi) + 2e^{-8t}$

A)Cách làm đúng, tính toán đúng, kết quả đúng.
B)Cách làm sai, tính toán đúng, kết quả sai.
C)Cách làm sai, tính toán sai, kết quả sai.
D)Cách làm đúng, tính toán sai, kết quả sai.

PHẦN TỰ LUẬN (5,0 điểm)

<u>Câu 11</u> (1,5 *điểm*) Khai triển Laurent hàm $F(p)=e^{\frac{3}{p}}-1$ quanh điểm bất thường cô lập $p=0$.
Dựa vào kết quả khai triển tìm gốc hàm ảnh $F(p)$ và tính tích phân $I = \oint\limits_{|z-2i|=6}(e^{\frac{3}{z}}-1)dz$.

<u>Câu 12</u> (1,5 *điểm*) Áp dụng phép biến đổi Laplace giải hệ phương trình vi phân
$$\begin{cases} x'-8y=2 \\ x+y'-9y=e^{5t} \end{cases}, \text{ điều kiện } x(0)=y(0)=0$$

<u>Câu 13</u> (2 *điểm*) Áp dụng phép biến đổi Laplace giải phương trình vi phân
$$y''+8y'+15y=4+e^{-2t}+\sin 3t \text{ với điều kiện } y(0)=0 \text{ và } y'(0)=0$$
Chứng tỏ rằng sau khoảng thời gian t đủ lớn nghiệm của phương trình vi phân, $y(t)$, biểu diễn xấp xỉ một dao động điều hòa theo thời gian t. Xác định vị trí cân bằng và biên độ dao động này.
Ghi chú : *Cán bộ coi thi không được giải thích đề thi.*

CHUẨN ĐẦU RA

Nội dung kiểm tra	Chuẩn đầu ra của học phần (về kiến thức)
Từ câu 1 đến câu 7 và câu 11	G1: 1.1, 1.2 G2: 2.1.1, 2.1.2, 2.1.3, 2.1.4 , 2.4.3
Câu 8, 9, 10,12,13: Áp dụng phép biến đổi Laplace giải phương trình tích phân, phương trình vi phân, hệ phương trình vi phân rồi ứng dụng vào đời sống.	G1: 1.1, 1.2 G2: 2.1.3, 2.1.3, 2.1.4 , 2.4.3

Ngày 23 tháng 12 năm 2018
Thông qua Bộ môn Toán

<table>
<tr><td colspan="2">TRƯỜNG ĐH SƯ PHẠM KỸ THUẬT TP.HCM
BỘ MÔN TOÁN
THI CUỐI KỲ HỌC KỲ I NĂM HỌC 2018-2019
MÔN: HÀM BIẾN PHỨC VÀ PHÉP BIẾN ĐỔI LAPLACE
Mã đề: 0100-2612-2018-0100-0011</td><td rowspan="3">Họ, tên sinh viên: ....
Mã số sinh viên:................................
Số báo danh (STT):........ Phòng thi: ......
Thời gian : 90 phút (26/12/2018)
Lưu ý: Sinh viên làm bài thi lần lượt trên trang 6, 5, 4,3. Đối với các hệ phương trình đại số tuyến tính thì chỉ cần ghi kết quả vào bài làm mà không cần trình bày cách giải.
Sinh viên nộp lại đề thi cùng với bài làm.</td></tr>
<tr><td>Giám thị 1</td><td>Giám thị 2</td></tr>
<tr><td>Giáo viên chấm thi 1&2</td><td>ĐIỂM</td></tr>
</table>

BÀI LÀM PHẦN TRẮC NGHIỆM

Câu hỏi	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Trả lời										

BÀI LÀM PHẦN TỰ LUẬN

ĐÁP ÁN MÔN

HÀM BIẾN PHỨC VÀ PHÉP BIẾN ĐỔI LAPLACE

(Ngày thi: **26**/12/2018)

PHẦN TRẮC NGHIỆM

Mã đề: 0100-2612-2018-0100-0000

Câu hỏi	1	2	3	4	5	6	7	8 (*)	9	10
Trả lời	B	D	B	A	A	C	A	0,5 -B	C	A

Mã đề: 0100-2612-2018-0100-0001

Câu hỏi	1	2	3	4	5	6	7	8	9(*)	10
Trả lời	A	D	B	A	A	C	B	A	0,5 -B	C

Mã đề: 0100-2612-2018-0100-0010

Câu hỏi	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10(*)
Trả lời	A	A	C	A	B	D	B	C	A	0,5-B

Mã đề: 0100-2612-2018-0100-0011

Câu hỏi	1	2	3	4	5	6	7	8(*)	9	10
Trả lời	D	A	A	A	B	C	B	0,5-B	C	A

(*) : Tất cả bài thi đều được 0,5 điểm câu này.

BÀI LÀM PHẦN TỰ LUẬN

Câu hỏi	**Nội dung**	***Điểm***
Câu 11		**1 điểm**
	Khai triển Laurent Ta có: $F(p)=e^{\frac{3}{p}}-1=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{n!\,p^n}$ -1= $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n!\,p^n}$ $\mathscr{L}^{-1}[F(p)]=\mathscr{L}^{-1}[\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n!\,p^n}]=\mathscr{L}^{-1}[\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\frac{3^n}{n!(n-1)!}\frac{(n-1)!}{p^n})]=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n t^{n-1}}{n!(n-1)!}$ Tính tích phân: Vì hàm số $f(z)=e^{\frac{3}{z}}-1$ giải tích trên $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ và đường tròn $\lvert z-2i\rvert=6$ bao quanh điểm bất thường cô lập $z=0$ nên áp dụng thặng dư ta được $I=\oint\limits_{\lvert z-2i\rvert=6}(e^{\frac{3}{z}}-1)dz=2\pi i\,\mathrm{Res}[e^{\frac{3}{z}}-1,0]=2\pi i\times 3=6\pi i$	0,5đ 0,5đ 0,5đ
Câu 12		*1,5đ*
	Đặt $X=\mathscr{L}[x], Y=\mathscr{L}[y]$; biến đổi Laplace hai vế và áp dụng tính chất tuyến tính ta được:	

	$\begin{cases} \mathscr{L}[x'] - 8\mathscr{L}[y] = \mathscr{L}[2] \\ \mathscr{L}[x] + \mathscr{L}[y'] - 9\mathscr{L}[y] = \mathscr{L}[e^{5t}] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} pX - 8Y = \dfrac{2}{p} \\ X + (p-9)Y = \dfrac{1}{p-5} \end{cases}$	0,5đ
	$\Leftrightarrow \begin{cases} X = \dfrac{2p^2 - 20p + 90}{p(p-5)(p-1)(p-8)} = \dfrac{A}{p} + \dfrac{B}{p-5} + \dfrac{C}{p-1} + \dfrac{D}{p-8} \\ Y = \dfrac{p^2 - 2p + 10}{p(p-5)(p-1)(p-8)} = \dfrac{E}{p} + \dfrac{F}{p-5} + \dfrac{G}{p-1} + \dfrac{H}{p-8} \end{cases}$	0,25đ
	Biến đổi ngược hai vế ta được: $\begin{cases} x = \mathscr{L}^{-1}[X] \\ y = \mathscr{L}^{-1}[Y] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \mathscr{L}^{-1}[A\dfrac{1}{p} + B\dfrac{1}{p-5} + C\dfrac{1}{p-1} + \dfrac{D}{p-8}] \\ y = \mathscr{L}^{-1}[E\dfrac{1}{p} + F\dfrac{1}{p-5} + G\dfrac{1}{p-1} + H\dfrac{1}{p-8}] \end{cases}$	0,25đ
	$\Leftrightarrow \begin{cases} x = A + Be^{5t} + Ce^{t} + De^{8t} \\ y = E + Fe^{5t} + Ge^{t} + He^{8t} \end{cases}$ ♦ Tìm A, B, C, D dựa vào $\dfrac{2p^2 - 20p + 90}{p(p-5)(p-1)(p-8)} = \dfrac{A}{p} + \dfrac{B}{p-5} + \dfrac{C}{p-1} + \dfrac{D}{p-8}$ $A = \dfrac{2\times 0^2 - 20\times 0 + 90}{(0-5)(0-1)(0-8)} = -\dfrac{9}{4}$, $B = \dfrac{2\times 5^2 - 20\times 5 + 90}{(5)(5-1)(5-8)} = -\dfrac{2}{3}$, $C = \dfrac{2\times(1)^2 - 20\times(1) + 90}{(1)(1-5)(1-8)} = \dfrac{18}{7}$ $D = \dfrac{2\times(8)^2 - 20\times(8) + 90}{(8)(8-5)(8-1)} = \dfrac{29}{84}$ ♦ Tìm E, F, G, H dựa vào $\dfrac{p^2 - 2p +}{p(p-5)(p-1)(p-8)} = \dfrac{E}{p} + \dfrac{F}{p-5} + \dfrac{G}{p-1} + \dfrac{H}{p-8}$ $E = \dfrac{0^2 - 2\times 0 + 10}{(0-5)(0-1)(0-8)} = -\dfrac{1}{4}$, $F = \dfrac{5^2 - 2\times 5 + 10}{(5)(5-1)(5-8)} = -\dfrac{5}{12}$ $G = \dfrac{(1)^2 - 2\times(1) + 10}{(1)(1-5)(1-8)} = \dfrac{9}{28}$ $H = \dfrac{(8)^2 - 2\times(8) + 10}{(8)(8-5)(8-1)} = \dfrac{29}{84}$	0,5đ
Câu 13		**2 đ**
	Đặt $Y = Y(p) = \mathscr{L}[y(t)]$. Biến đổi Laplace hai vế phương trình, áp dụng tính chất tuyến tính và tính chất đạo hàm hàm gốc ta được: $p^2Y - py(0) - y'(0) + 8(pY - y(0)) + 15Y = \mathscr{L}[4 + e^{-2t} + \sin 3t]$ $\Leftrightarrow Y(p^2 + 8p + 15) = \dfrac{4}{p} + \dfrac{1}{p+2} + \dfrac{3}{p^2+9}$	***0.5đ***

$$\Leftrightarrow Y=\frac{5p^3+11p^2+51p+72}{p(p+2)(p+3)(p+5)(p^2+9)}$$

0.5đ

Phân tích thành phân thức đơn giản

$$Y=\frac{5p^3+11p^2+51p+72}{p(p+2)(p+3)(p+5)(p^2+9)}\overset{(*)}{=}\frac{A}{p}+\frac{B}{p+2}+\frac{C}{p+3}+\frac{D}{p+5}+\frac{Ep+3F}{p^2+9}$$

Biếi đổi Laplace ngược hai vế và áp dụng tính chất tuyến tính ta được

$$y(t)=\mathscr{L}^{-1}[Y]=\mathscr{L}^{-1}[A\frac{1}{p}+B\frac{1}{p+2}+C\frac{1}{p+3}+D\frac{1}{p+5}+E\frac{p}{p^2+9}+F\frac{3}{p^2+9}]$$

$$\Leftrightarrow y(t)=A+Be^{-2t}+Ce^{-3t}+De^{-5t}+E\cos 3t+F\sin 3t$$

0.5đ

Tìm A,B,C,D,E,F dựa vào đẳng thức:

$$\frac{5p^3+11p^2+51p+72}{p(p+2)(p+3)(p+5)(p^2+9)}\overset{(*)}{=}\frac{A}{p}+\frac{B}{p+2}+\frac{C}{p+3}+\frac{D}{p+5}+\frac{Ep+3F}{p^2+9}$$

$$A=\frac{5\times 0^3+11\times 0^2+51\times 0+72}{(0+2)(0+3)(0+5)(0^2+9)}=\frac{4}{15},\quad B=\frac{5\times(-2)^3+11\times(-2)^2+51\times(-2)+72}{(-2)(-2+3)(-2+5)((-2)^2+9)}=\frac{1}{3}$$

$$C=\frac{5\times(-3)^3+11\times(-3)^2+51\times(-3)+72}{(-3)(-3+2)(-3+5)((-3)^2+9)}=-\frac{13}{12}$$

$$D=\frac{5\times(-5)^3+11\times(-5)^2+51\times(-5)+72}{(-5)(-5+2)(-5+3)((-5)^2+9)}=\frac{533}{1020}$$

Từ đẳng thức (*) lần lượt cho $p=1, p=2$ ta được

$$\frac{5\times 1^3+11\times 1^2+51\times 1+72}{1(1+2)(1+3)(1+5)(1^2+9)}=\frac{A}{1}+\frac{B}{1+2}+\frac{C}{1+3}+\frac{D}{1+5}+\frac{E\times 1+3F}{1^2+9}$$

$$\frac{5\times 2^3+11\times 2^2+51\times 2+72}{2(2+2)(2+3)(2+5)(2^2+9)}=\frac{A}{2}+\frac{B}{2+2}+\frac{C}{2+3}+\frac{D}{2+5}+\frac{E\times 2+3F}{2^2+9}$$

Thay $A=\frac{4}{15},\ B=\frac{1}{3},\ C=-\frac{13}{12},\ D=\frac{533}{1020}$ vào hai phương trình trên và giải hệ với ẩn là E,F ta được: $E=-\frac{2}{51},\ F=\frac{1}{102}$

Vậy nghiệm phương trình là

$$y(t)=\frac{4}{15}+\frac{1}{3}e^{-2t}-\frac{13}{12}e^{-3t}+\frac{533}{1020}e^{-5t}-\frac{2}{51}\cos 3t-\frac{1}{102}\sin 3t$$

b) Vì $\lim\limits_{t\to+\infty}[Be^{-2t}+Ce^{-3t}+De^{-5t}]=0$ nên sau khoảng thời gian t đủ lớn

$$y(t)\approx A+E\cos 3t+F\sin 3t=A+\sqrt{E^2+F^2}\left(\frac{E}{\sqrt{E^2+F^2}}\cos 3t+\frac{F}{\sqrt{E^2+F^2}}\sin 3t\right)$$

Đặt $\sin\alpha=\frac{E}{\sqrt{E^2+F^2}},\cos\alpha=\frac{F}{\sqrt{E^2+F^2}}$

	$y(t) \approx A + \sqrt{E^2 + F^2}(\sin\alpha\cos 3t + \cos\alpha\sin 3t) = A + \sqrt{E^2 + F^2}\sin(3t + \alpha)$ Vậy sau khoảng thời gian t đủ lớn thì nghiệm phương trình vi phân, $y(t)$, xấp xỉ dao động điều hòa theo thời gian t có biên độ dao động $\sqrt{E^2 + F^2} = \frac{\sqrt{17}}{102}$ quanh điểm cân bằng có tọa độ $y_o = A = \frac{4}{15}$.	***0.5đ***

*** HẾT***