Trường ĐH Sư phạm Kỹ thuật Tp.HCM
KHOA KHOA HỌC ỨNG DỤNG
BỘ MÔN TOÁN

**ĐỀ THI CUỐI KỲ *HỌC KỲ I NĂM HỌC 2016-2017***
**MÔN**: ***HÀM BIẾN PHỨC VÀ PHÉP BIẾN ĐỔI LAPLACE***
Mã môn học: **MATH 121201** *Thời gian* : 90 phút (21/12/2016)
Đề thi gồm 3 trang ***Được phép sử dụng tài liệu***
Mã đề: 0001-0010-1100-2016-2112-0402 (**Nộp lại đề này**)

# PHẦN TRẮC NGHIỆM LỰA CHỌN (5,0 điểm)

**(Chọn 1 trong các câu A, B, C, D rồi điền vào *BÀI LÀM PHẦN TRẮC NGHIỆM* ở trang 6)**

**Câu 1** Ảnh của đường thẳng y = 0 qua phép biến hình $w = e^{3-iz} = u + iv$ là

A) Đường tròn $u^2 + v^2 = e^6$
B) Đường thẳng u = 0.
C) Đường tròn $u^2 + v^2 = e^3$
D) Đường thẳng v = 0

**Câu 2** Khẳng định nào sau đây **sai?**

**A)** Nếu hàm u(x,y) và v(x,y) điều hòa và thỏa điều kiện (C-R) trên hình tròn mở $D = \{z : |z + 3i| < 9\}$ thì hàm $f(z)$ = u(x,y) + iv(x,y) giải tích trên $D$.

**B)** Nếu hàm phức $f(z)$ = u(x,y) + iv(x,y) không khả vi trên miền D thì các hàm u(x,y) và v(x,y) không thỏa điều kiện Cauchy – Reimann trên miền D

**C)** Hàm phức $f(z)$ = u(x,y) + iv(x,y) liên tục trên miền D khi và chỉ khi các hàm u(x,y), v(x,y) liên tục trên miền D.

**D)** Nếu hàm v(x,y) không điều hòa trên miền D thì f(z) = u(x,y)+iv(x,y) không giải tích trên D.

***Câu 3*** Cho số phức $z = \frac{5}{2+i} + i^9 + e^{-8i}$. Khi đó:

A) Rez = 2 + cos8, Imz = -sin8
B) Rez = 10 + cos8, Imz = sin8
C) Rez = 2 + cos8, Imz = sin8
D) Rez = 2+ cos8, Imz = -2 – sin8

**Câu 4** Trong mặt phẳng phức cho các tập hợp điểm $E = \{z : |z + 2 - i| = |z + 6i|\}$, $F = \{z : |z + 1 - 5i| \le 6\}$. *Khẳng định nào sau đây sai?*

A) Tập E không bị chặn.
B) Tập F là là tập compact.
C) Tập F là hình tròn đóng tâm -1+5i bán kính bằng 6.
D) Tập E là đường trung trực của đoạn thẳng nối 2 -i với 6i.

***Câu 5*** Hàm phức $f(z) = \frac{6}{z} + \frac{\bar{z}}{|z|^2} = u + iv$ có phần thực và phần ảo là:

A) $u = \frac{7x}{x^2 + y^2}$, $v = \frac{7y}{x^2 + y^2}$
B) $u = \frac{5x}{x^2 + y^2}$, $v = \frac{-5y}{x^2 + y^2}$
C) $u = \frac{7x}{x^2 + y^2}$, $v = \frac{-7y}{x^2 + y^2}$
D) một kết quả khác

***Câu 6*** Khẳng định nào sau đây sai*?*

A) Nếu a là điểm bất thường cô lập của hàm f(z) và $\lim\limits_{z\to a} f(z) = \infty$, $\lim\limits_{z\to a}(z-a)^m f(z) = A$ (với $0 \ne A \ne \infty$) thì a là cực điểm cấp m của hàm f(z).

B) $z = 3$ là cực điểm cấp 2 của hàm $f(z) = \frac{e^z + 12z}{(z-3)^2}$

C) $\oint\limits_{|z-2|=4} \frac{e^z + 12z}{(z-3)^2} dz = 2\pi i(e^3 + 12)$

D) $\oint\limits_{|z+4i|=3} \frac{e^z + 12z}{(z-3)^2} dz = 2\pi i \operatorname{Res}\left[\frac{e^z + 12z}{(z-3)^2}, 3\right]$

***Câu 7*** Để giải hệ phương trình vi phân: $\begin{cases} x'-3y=0 \\ x+y'-4y=1 \end{cases}$, với điều kiện x(0)= y(0)= 0 ta làm như sau:

- Đặt $X=\mathscr{L}[x], Y=\mathscr{L}[y]$ và biến đổi Laplace hai vế ta được: $\begin{cases} XP-3Y=0 \\ X+(P-4)Y=\dfrac{1}{p} \end{cases}$

- Giải hệ phương trình với X, Y là ẩn ta được $\begin{cases} X=\dfrac{3}{p(p-1)(p-3)} \\ Y=\dfrac{1}{(p-1)(p-3)} \end{cases}$

- Phân tích thành các phân thức đơn giản ta được $\begin{cases} X=\dfrac{A}{p}+\dfrac{B}{P-1}+\dfrac{C}{P-3} \\ Y=\dfrac{D}{P-1}+\dfrac{E}{P-3} \end{cases}$ với A, B, C, D, E là các hằng số mà ở đây ta không tìm.

- Biến đổi Laplace ngược hai vế ta được nghiệm $\begin{cases} x=A+Be^{t}+Ce^{3t} \\ y=De^{t}+Ee^{3t} \end{cases}$

Khẳng định nào sau đây đúng?

**A)** Cách làm đúng, tính toán đúng, kết quả đúng.
**B)** Cách làm đúng, tính toán sai, kết quả đúng.
**C)** Cách làm sai, tính toán sai, kết quả sai.
**D)** Cách làm đúng, tính toán sai, kết quả sai.

**Câu 8** Giả sử $\mathscr{L}$[f(t)] = F(p). Khẳng định nào sau đây **sai?**

A)Nếu f(t) là hàm gốc tuần hoàn với chu kỳ **T** thì $\mathscr{L}$[f(t)] = $\dfrac{1}{1-e^{-Tp}}\int_0^T e^{-pt} f(t)dt$

B)Nếu $f(t)=\begin{cases} \sin t & khi \quad 0<t<\pi \\ 0 & khi \quad \pi<t<2\pi \end{cases}$ và f(t+2π) = f(t) thì $\mathscr{L}$[f(t)] = $\dfrac{1}{1-e^{-2\pi p}}\int_0^{2\pi} e^{-pt}\sin t dt$

C) $\mathscr{L}\left[\int_0^t f(u)du\right]=\dfrac{F(p)}{p}$

D) $\mathscr{L}\left[\int_0^t e^{3u}ch2udu\right]=\dfrac{p-3}{p((p-3)^2-4)}$

**Câu 9** Trong mặt phẳng phức, cho các hàm số $u(x,y)=6x^2-6y^2+5y+2$, $v=12xy-5x+2$. Khẳng định nào sau đây **đúng?**

A) u điều hòa, v không điều hòa.
B) u, v là các hàm điều hòa liên hợp.
C) u, v điều hòa nhưng không là các hàm điều hòa liên hợp.
D) v điều hòa, u không điều hòa

***Câu 10*** Cho phương trình vi phân: $y'-3y = u(t-2\pi)e^{5(t-2\pi)}$ (1) với điều kiện ban đầu y(0) = 4. Để giải phương trình vi phân này ta làm như sau: Đặt Y = Y(p)= $\mathscr{L}$[y(t)]

- Biến đổi Laplace hai vế phương trình (1 ) ta được: $pY-3Y = \dfrac{e^{-2\pi p}}{p-5}+4$ (2)

- Giải phương trình (2) với Y là ẩn ta được : Y= $\dfrac{e^{-2\pi p}}{(p-3)(p-5)}+\dfrac{4}{p-3}$ (3)

- Phân tích vế phải của (3) thành phân thức đơn giản ta được: Y = $\dfrac{1}{2}e^{-2\pi p}\left(\dfrac{1}{p-5}-\dfrac{1}{p-3}\right)+\dfrac{4}{p-3}$

- Biến đổi Laplace ngược hai vế ta được nghiệm: y = $\dfrac{1}{2}\left(e^{3(t-2\pi)}-e^{5(t-2\pi)}\right)u(t-2\pi)+4e^{3t}$

A) Cách làm sai, tính toán sai, kết quả sai.
B)Cách làm sai, tính toán đúng, kết quả sai.
C) Cách làm đúng, tính toán đúng, kết quả đúng.
D)Cách làm đúng, tính toán sai, kết quả sai.

# PHẦN TỰ LUẬN (5,0 điểm)

***Câu 11*** (1 *điểm*) Khai triển Laurent hàm $f(z) = (z+i)^2 e^{\frac{1}{z+i}}$ quanh điểm bất thường cô lập $z = -i$. Phân loại điểm bất thường cô lập $z = -i$. Tính tích phân $I = \oint\limits_{|z-3i|=9} (z+i)^2 e^{\frac{1}{z+i}} dz$.

***Câu 12*** (2 *điểm*) Áp dụng phép biến đổi Laplace giải phương trình tích phân

$$y(t) = 3 + e^{-5t} - 5\int_0^t y(u)\cos 2(t-u)\,du$$

Tính $\lim\limits_{t\to+\infty} y(t)$ rồi dựa vào kết quả đó xác định giá trị (gần đúng) của $y(t)$ sau khoảng thời gian $t$ đủ lớn.

***Câu 13*** (2 *điểm*)

a) Áp dụng phép biến đổi Laplace giải phương trình vi phân

$$y'' + 7y' + 6y = 1 + \sin 3t \text{ với điều kiện } y(0) = 0 \text{ và } y'(0) = 0$$

b) Chứng tỏ rằng sau khoảng thời gian $t$ đủ lớn nghiệm của phương trình vi phân, $y(t)$, biểu diễn xấp xỉ một dao động điều hòa theo thời gian $t$. Xác định vị trí cân bằng và biên độ dao động này.

---

**Ghi chú :** *Cán bộ coi thi không được giải thích đề thi.*

**CHUẨN ĐẦU RA**

| **Nội dung kiểm tra** | **Chuẩn đầu ra của học phần (về kiến thức)** |
|---|---|
| Từ câu 1 đến câu 10 | G1: 1.1, 1.2<br>G2: 2.1.1, 2.1.2, 2.1.3, 2.1.4 , 2.4.3 |
| Câu 11: Khai triển được chuỗi Laurent, tính được thặng dư và áp dụng tính tích phân.<br>Câu 12, Câu 13: Áp dụng phép biến đổi Laplace giải phương trình vi phân rồi ứng dụng vào đời sống. | G1: 1.1, 1.2<br>G2: 2.1.3, 2.1.3, 2.1.4 , 2.4.3 |

Ngày 19 tháng 12 năm 2016
Thông qua Bộ môn Toán

| | |
|---|---|
| TRƯỜNG ĐH SƯ PHẠM KỸ THUẬT TP.HCM<br>BỘ MÔN TOÁN<br>**THI CUỐI KỲ *HỌC KỲ I NĂM HỌC 2016-2017***<br>**MÔN: HÀM BIẾN PHỨC VÀ PHÉP BIẾN ĐỔI LAPLACE**<br>Mã đề: 0001-0010-1100-2016-2112-0402 | Họ, tên sinh viên: .....................................<br>Mã số sinh viên:...............................<br>Số báo danh (***STT***):........ Phòng thi: ....<br>*Thời gian* : 90 phút (21/12/2016)<br>**Lưu ý**: Sinh viên làm bài thi lần lượt trên trang 6, 5, 4,3. Đối với các hệ phương trình đại số tuyến tính thì chỉ cần ghi kết quả vào bài làm mà không cần trình bày cách giải.<br>***Sinh viên nộp lại đề thi cùng với bài làm.*** |
| ***Giám thị 1*** \| ***Giám thị 2*** | |
| ***Giáo viên chấm thi 1&2*** \| **ĐIỂM** | |

## BÀI LÀM PHẦN TRẮC NGHIỆM

| Câu hỏi | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Trả lời | | | | | | | | | | |

## BÀI LÀM PHẦN TỰ LUẬN

Trường ĐH Sư phạm Kỹ thuật Tp.HCM
KHOA KHOA HỌC ỨNG DỤNG
BỘ MÔN TOÁN

**ĐỀ THI CUỐI KỲ *HỌC KỲ I NĂM HỌC 2016-2017***
**MÔN**: ***HÀM BIẾN PHỨC VÀ PHÉP BIẾN ĐỔI LAPLACE***
Mã môn học: **MATH 121201** *Thời gian* : 90 phút (21/12/2016)
Đề thi gồm 3 trang ***Được phép sử dụng tài liệu***
Mã đề: 0010-0010-1100-2016-2112-0402 (**Nộp lại đề này**)

# PHẦN TRẮC NGHIỆM LỰA CHỌN (5,0 điểm)

**(Chọn 1 trong các câu A, B, C, D rồi điền vào *BÀI LÀM PHẦN TRẮC NGHIỆM* ở trang 6)**

__Câu 1__ Trong mặt phẳng phức, cho các hàm số $u(x,y)=6x^2-6y^2+5y+2$, $v=12xy-5x+2$. Khẳng định nào sau đây **đúng?**

A) u điều hòa, v không điều hòa.
B) u, v là các hàm điều hòa liên hợp.
C) u, v điều hòa nhưng không là các hàm điều hòa liên hợp.
D) v điều hòa, u không điều hòa

***__Câu 2__*** Cho phương trình vi phân: $y'-3y = u(t-2\pi)e^{5(t-2\pi)}$ (1) với điều kiện ban đầu y(0) = 4.
Để giải phương trình vi phân này ta làm như sau: Đặt Y = Y(p)= $\mathscr{L}$[y(t)]

- Biến đổi Laplace hai vế phương trình (1 ) ta được: $pY-3Y = \dfrac{e^{-2\pi p}}{p-5}+4$ (2)
- Giải phương trình (2) với Y là ẩn ta được : Y= $\dfrac{e^{-2\pi p}}{(p-3)(p-5)}+\dfrac{4}{p-3}$ (3)
- Phân tích vế phải của (3) thành phân thức đơn giản ta được: Y = $\dfrac{1}{2}e^{-2\pi p}\left(\dfrac{1}{p-5}-\dfrac{1}{p-3}\right)+\dfrac{4}{p-3}$
- Biến đổi Laplace ngược hai vế ta được nghiệm: y = $\dfrac{1}{2}\left(e^{3(t-2\pi)}-e^{5(t-2\pi}\right)u(t-2\pi)+4e^{3t}$

A) Cách làm sai, tính toán sai, kết quả sai.
B)Cách làm sai, tính toán đúng, kết quả sai.
C) Cách làm đúng, tính toán đúng, kết quả đúng.
D)Cách làm đúng, tính toán sai, kết quả sai.

***__Câu 3__*** Hàm phức f(z) = $\dfrac{6}{z}+\dfrac{\bar{z}}{|z|^2}$ = u + iv có phần thực và phần ảo là:

A) u = $\dfrac{7x}{x^2+y^2}$, v = $\dfrac{7y}{x^2+y^2}$
B) u = $\dfrac{5x}{x^2+y^2}$, v = $\dfrac{-5y}{x^2+y^2}$
C) u = $\dfrac{7x}{x^2+y^2}$, v = $\dfrac{-7y}{x^2+y^2}$
D) một kết quả khác

__Câu 4__ Ảnh của đường thẳng y = 0 qua phép biến hình w = $e^{3-iz}$ = u +iv là

A) Đường tròn $u^2+v^2=e^6$
B) Đường thẳng v = 0.
C) Đường tròn $u^2+v^2=e^3$
D) Đường thẳng u = 0.

__Câu 5__ Khẳng định nào sau đây **sai?**

**A)** Nếu hàm u(x,y) và v(x,y) điều hòa và thỏa điều kiện (C-R) trên hình tròn mở $D=\{z:|z+3i|<9\}$ thì hàm $f(z)$ = u(x,y) + iv(x,y) giải tích trên $D$.
**B)** Nếu hàm phức $f(z)$ = u(x,y) + iv(x,y) không khả vi trên miền D thì các hàm u(x,y) và v(x,y) không thỏa điều kiện Cauchy – Reimann trên miền D
**C)** Hàm phức $f(z)$ = u(x,y) + iv(x,y) liên tục trên miền D khi và chỉ khi các hàm u(x,y), v(x,y) liên tục trên miền D.
**D)** Nếu hàm v(x,y) không điều hòa trên miền D thì f(z) = u(x,y)+iv(x,y) không giải tích trên D.

***__Câu 6__*** Cho số phức z = $\dfrac{5}{2+i}+i^9+e^{-8i}$. Khi đó:

A) Rez = 2 + cos8, Imz = -sin8
B) Rez = 10 + cos8, Imz = sin8
C) Rez = 2 + cos8, Imz = sin8
D) Rez = 2+ cos8, Imz = -2 – sin8

**<u>Câu 7</u>** Trong mặt phẳng phức cho các tập hợp điểm $E = \{z : |z+2-i| = |z+6i|\}$, $F = \{z : |z+1-5i| \le 6\}$. *Khẳng định nào sau đây sai?*

A) Tập E không bị chặn.
B) Tập F là là tập compact.
C) Tập F là hình tròn đóng tâm -1+5i bán kính bằng 6.
D) Tập E là đường trung trực của đoạn thẳng nối 2 -i với 6i.

***<u>Câu 8</u>*** Khẳng định nào sau đây sai?

A) Nếu a là điểm bất thường cô lập của hàm f(z) và $\lim\limits_{z\to a} f(z) = \infty$, $\lim\limits_{z\to a}(z-a)^m f(z) = A$ (với $0 \ne A \ne \infty$) thì a là cực điểm cấp m của hàm f(z).

B) $z = 3$ là cực điểm cấp 2 của hàm $f(z) = \dfrac{e^z + 12z}{(z-3)^2}$

C) $\displaystyle\oint\limits_{|z-2|=4} \frac{e^z+12z}{(z-3)^2}dz = 2\pi i(e^3+12)$

D) $\displaystyle\oint\limits_{|z+4i|=3} \frac{e^z+12z}{(z-3)^2}dz = 2\pi i \operatorname{Res}\left[\frac{e^z+12z}{(z-3)^2}, 3\right]$

***<u>Câu 9</u>*** Để giải hệ phương trình vi phân: $\begin{cases} x' - 3y = 0 \\ x + y' - 4y = 1 \end{cases}$, với điều kiện x(0)= y(0)= 0 ta làm như sau:

- Đặt $X = \mathscr{L}[x], Y = \mathscr{L}[y]$ và biến đổi Laplace hai vế ta được: $\begin{cases} XP - 3Y = 0 \\ X + (P-4)Y = \dfrac{1}{p} \end{cases}$
- Giải hệ phương trình với X, Y là ẩn ta được $\begin{cases} X = \dfrac{3}{p(p-1)(p-3)} \\ Y = \dfrac{1}{(p-1)(p-3)} \end{cases}$
- Phân tích thành các phân thức đơn giản ta được $\begin{cases} X = \dfrac{A}{p} + \dfrac{B}{P-1} + \dfrac{C}{P-3} \\ Y = \dfrac{D}{P-1} + \dfrac{E}{P-3} \end{cases}$ với A, B, C, D, E là các hằng số mà ở đây ta không tìm.
- Biến đổi Laplace ngược hai vế ta được nghiệm $\begin{cases} x = A + Be^t + Ce^{3t} \\ y = De^t + Ee^{3t} \end{cases}$

Khẳng định nào sau đây đúng?

**A)** Cách làm đúng, tính toán đúng, kết quả đúng.
**B)** Cách làm đúng, tính toán sai, kết quả đúng.
**C)** Cách làm sai, tính toán sai, kết quả sai.
**D)** Cách làm đúng, tính toán sai, kết quả sai.

**<u>Câu 10</u>** Giả sử $\mathscr{L}$[f(t)] = F(p). Khẳng định nào sau đây **sai?**

A)Nếu f(t) là hàm gốc tuần hoàn với chu kỳ **T** thì $\mathscr{L}$[f(t)] = $\displaystyle\frac{1}{1-e^{-Tp}}\int_0^T e^{-pt} f(t)dt$

B)Nếu $f(t) = \begin{cases} \sin t & khi \quad 0 < t < \pi \\ 0 & khi \quad \pi < t < 2\pi \end{cases}$ và f(t+2π) = f(t) thì $\mathscr{L}$[f(t)] = $\displaystyle\frac{1}{1-e^{-2\pi p}}\int_0^{2\pi} e^{-pt}\sin t dt$

C) $\displaystyle\mathscr{L}\left[\int_0^t f(u)du\right] = \frac{F(p)}{p}$

D) $\displaystyle\mathscr{L}\left[\int_0^t e^{3u} ch2u du\right] = \frac{p-3}{p((p-3)^2-4)}$

## PHẦN TỰ LUẬN (5,0 điểm)

***Câu 11*** (1 *điểm*) Khai triển Laurent hàm $f(z)=(z+i)^2 e^{\frac{1}{z+i}}$ quanh điểm bất thường cô lập $z=-i$. Phân loại điểm bất thường cô lập $z=-i$. Tính tích phân $I=\oint\limits_{|z-3i|=9}(z+i)^2 e^{\frac{1}{z+i}}dz$.

***Câu 12*** (2 *điểm*) Áp dụng phép biến đổi Laplace giải phương trình tích phân

$$y(t)= 3+e^{-5t}-5\int_0^t y(u)\cos 2(t-u)du$$

Tính $\lim\limits_{t\to+\infty} y(t)$ rồi dựa vào kết quả đó xác định giá trị (gần đúng) của $y(t)$ sau khoảng thời gian $t$ đủ lớn.

***Câu 13*** (2 *điểm*)

a) Áp dụng phép biến đổi Laplace giải phương trình vi phân

$$y''+7y'+6y=1+\sin 3t \text{ với điều kiện } y(0)=0 \text{ và } y'(0)=0$$

b) Chứng tỏ rằng sau khoảng thời gian $t$ đủ lớn nghiệm của phương trình vi phân, $y(t)$, biểu diễn xấp xỉ một dao động điều hòa theo thời gian $t$. Xác định vị trí cân bằng và biên độ dao động này.

---

**Ghi chú :** *Cán bộ coi thi không được giải thích đề thi.*

**CHUẨN ĐẦU RA**

| **Nội dung kiểm tra** | **Chuẩn đầu ra của học phần (về kiến thức)** |
|---|---|
| Từ câu 1 đến câu 10 | G1: 1.1, 1.2<br>G2: 2.1.1, 2.1.2, 2.1.3, 2.1.4 , 2.4.3 |
| Câu 11: Khai triển được chuỗi Laurent, tính được thặng dư và áp dụng tính tích phân.<br>Câu 12, Câu 13: Áp dụng phép biến đổi Laplace giải phương trình vi phân rồi ứng dụng vào đời sống. | G1: 1.1, 1.2<br>G2: 2.1.3, 2.1.3, 2.1.4 , 2.4.3 |

Ngày 19 tháng 12 năm 2016
Thông qua Bộ môn Toán

| TRƯỜNG ĐH SƯ PHẠM KỸ THUẬT TP.HCM<br>BỘ MÔN TOÁN<br>**THI CUỐI KỲ *HỌC KỲ I NĂM HỌC 2016-2017***<br>**MÔN**: **HÀM BIẾN PHỨC VÀ PHÉP BIẾN ĐỔI LAPLACE**<br>Mã đề: 0010-0010-1100-2016-2112-0402 | | Họ, tên sinh viên: .....................................<br>Mã số sinh viên:...............................<br>Số báo danh (***STT***):........ Phòng thi: ....<br>*Thời gian* : 90 phút (21/12/2016)<br>**Lưu ý**: Sinh viên làm bài thi lần lượt trên trang 6, 5, 4,3. Đối với các hệ phương trình đại số tuyến tính thì chỉ cần ghi kết quả vào bài làm mà không cần trình bày cách giải. |
|---|---|---|
| ***Giám thị 1*** | ***Giám thị 2*** | |
| ***Giáo viên chấm thi 1&2*** | **ĐIỂM** | ***Sinh viên nộp lại đề thi cùng với bài làm.*** |

## BÀI LÀM PHẦN TRẮC NGHIỆM

| Câu hỏi | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Trả lời | | | | | | | | | | |

## BÀI LÀM PHẦN TỰ LUẬN

Trường ĐH Sư phạm Kỹ thuật Tp.HCM
KHOA KHOA HỌC ỨNG DỤNG
BỘ MÔN TOÁN

**ĐỀ THI CUỐI KỲ *HỌC KỲ I NĂM HỌC 2016-2017***
**MÔN**: ***HÀM BIẾN PHỨC VÀ PHÉP BIẾN ĐỔI LAPLACE***
Mã môn học: **MATH 121201** *Thời gian* : 90 phút (21/12/2016)
Đề thi gồm 3 trang ***Được phép sử dụng tài liệu***
Mã đề: 0011-0010-1100-2016-2112-0402 (**Nộp lại đề này**)

# PHẦN TRẮC NGHIỆM LỰA CHỌN (5,0 điểm)

**(Chọn 1 trong các câu A, B, C, D rồi điền vào *BÀI LÀM PHẦN TRẮC NGHIỆM* ở trang 6)**

***Câu 1*** Hàm phức $f(z) = \frac{6}{z} + \frac{\bar{z}}{|z|^2} = u + iv$ có phần thực và phần ảo là:

A) $u = \frac{5x}{x^2+y^2}$, $v = \frac{-5y}{x^2+y^2}$

B) $u = \frac{7x}{x^2+y^2}$, $v = \frac{7y}{x^2+y^2}$

C) $u = \frac{7x}{x^2+y^2}$, $v = \frac{-7y}{x^2+y^2}$

D) một kết quả khác

***Câu 2*** Khẳng định nào sau đây sai*?*

A) Nếu a là điểm bất thường cô lập của hàm f(z) và $\lim\limits_{z\to a} f(z) = \infty$, $\lim\limits_{z\to a}(z-a)^m f(z) = A$ (với $0 \neq A \neq \infty$) thì a là cực điểm cấp m của hàm f(z).

B) $z = 3$ là cực điểm cấp 2 của hàm $f(z) = \frac{e^z + 12z}{(z-3)^2}$

C) $\oint\limits_{|z-2|=4} \frac{e^z+12z}{(z-3)^2}dz = 2\pi i(e^3+12)$

D) $\oint\limits_{|z+4i|=3} \frac{e^z+12z}{(z-3)^2}dz = 2\pi i \operatorname{Res}\left[\frac{e^z+12z}{(z-3)^2}, 3\right]$

**Câu 3** Ảnh của đường thẳng y = 0 qua phép biến hình $w = e^{3-iz} = u + iv$ là

A) Đường tròn $u^2 + v^2 = e^6$

B) Đường thẳng u = 0.

C) Đường tròn $u^2 + v^2 = e^3$

D) Đường thẳng v = 0

**Câu 4** Khẳng định nào sau đây **sai?**

**A)** Nếu hàm v(x,y) không điều hòa trên miền D thì f(z) = u(x,y)+iv(x,y) không giải tích trên D.

**B)** Nếu hàm phức $f(z)$ = u(x,y) + iv(x,y) không khả vi trên miền D thì các hàm u(x,y) và v(x,y) không thỏa điều kiện Cauchy – Reimann trên miền D

**C)** Hàm phức $f(z)$ = u(x,y) + iv(x,y) liên tục trên miền D khi và chỉ khi các hàm u(x,y), v(x,y) liên tục trên miền D.

**D)** Nếu hàm u(x,y) và v(x,y) điều hòa và thỏa điều kiện (C-R) trên hình tròn mở $D = \{z : |z+3i| < 9\}$ thì hàm $f(z)$ = u(x,y) + iv(x,y) giải tích trên $D$.

***Câu 5*** Cho số phức $z = \frac{5}{2+i} + i^9 + e^{-8i}$. Khi đó:

A) Rez = 2 + cos8, Imz = -sin8

B) Rez = 10 + cos8, Imz = -sin8

C) Rez = 2 + cos8, Imz = sin8

D) Rez = 2+ cos8, Imz = -2 – sin8

**Câu 6** Trong mặt phẳng phức cho các tập hợp điểm $E = \{z : |z+2-i| = |z+6i|\}$, $F = \{z : |z+1-5i| \le 6\}$. *Khẳng định nào sau đây sai?*

A) Tập E không bị chặn.

B) Tập F là là tập compact.

C) Tập F là hình tròn đóng tâm -1+5i bán kính bằng 6.

D) Tập E là đường trung trực của đoạn thẳng nối 2 -i với 6i.

***Câu 7*** Cho phương trình vi phân: $y' - 3y = u(t-2\pi)e^{5(t-2\pi)}$ (1) với điều kiện ban đầu y(0) = 4.

Để giải phương trình vi phân này ta làm như sau: Đặt Y = Y(p)= $\mathscr{L}$[y(t)]

- ♦ Biến đổi Laplace hai vế phương trình (1 ) ta được: $pY - 3Y = \dfrac{e^{-2\pi p}}{p-5} + 4$ (2)
- ♦ Giải phương trình (2) với Y là ẩn ta được : Y= $\dfrac{e^{-2\pi p}}{(p-3)(p-5)} + \dfrac{4}{p-3}$ (3)
- ♦ Phân tích vế phải của (3) thành phân thức đơn giản ta được: Y = $\dfrac{1}{2}e^{-2\pi p}\left(\dfrac{1}{p-5} - \dfrac{1}{p-3}\right) + \dfrac{4}{p-3}$
- ♦ Biến đổi Laplace ngược hai vế ta được nghiệm: y = $\dfrac{1}{2}\left(e^{3(t-2\pi)} - e^{5(t-2\pi}\right)u(t-2\pi) + 4e^{3t}$

A) Cách làm sai, tính toán sai, kết quả sai.
B)Cách làm sai, tính toán đúng, kết quả sai.
C) Cách làm đúng, tính toán đúng, kết quả đúng.
D)Cách làm đúng, tính toán sai, kết quả sai.

**<u>Câu 8</u>** Để giải hệ phương trình vi phân: $\begin{cases} x' - 3y = 0 \\ x + y' - 4y = 1 \end{cases}$, với điều kiện x(0)= y(0)= 0 ta làm như sau:

- ♦ Đặt X = $\mathscr{L}[x]$, Y = $\mathscr{L}[y]$ và biến đổi Laplace hai vế ta được: $\begin{cases} XP - 3Y = 0 \\ X + (P-4)Y = \dfrac{1}{p} \end{cases}$
- ♦ Giải hệ phương trình với X, Y là ẩn ta được $\begin{cases} X = \dfrac{3}{p(p-1)(p-3)} \\ Y = \dfrac{1}{(p-1)(p-3)} \end{cases}$
- ♦ Phân tích thành các phân thức đơn giản ta được $\begin{cases} X = \dfrac{A}{p} + \dfrac{B}{P-1} + \dfrac{C}{P-3} \\ Y = \dfrac{D}{P-1} + \dfrac{E}{P-3} \end{cases}$ với A, B, C, D, E là các hằng số mà ở đây ta không tìm.
- ♦ Biến đổi Laplace ngược hai vế ta được nghiệm $\begin{cases} x = A + Be^{t} + Ce^{3t} \\ y = De^{t} + Ee^{3t} \end{cases}$

Khẳng định nào sau đây đúng?

**A)** Cách làm đúng, tính toán đúng, kết quả đúng.
**B)** Cách làm đúng, tính toán sai, kết quả đúng.
**C)** Cách làm sai, tính toán sai, kết quả sai.
**D)** Cách làm đúng, tính toán sai, kết quả sai.

**<u>Câu 9</u>** Giả sử $\mathscr{L}$[f(t)] = F(p). Khẳng định nào sau đây **sai?**

A)Nếu f(t) là hàm gốc tuần hoàn với chu kỳ **T** thì $\mathscr{L}$[f(t)] = $\dfrac{1}{1-e^{-Tp}}\int_0^T e^{-pt} f(t)dt$

B)Nếu $f(t) = \begin{cases} \sin t & khi \quad 0 < t < \pi \\ 0 & khi \quad \pi < t < 2\pi \end{cases}$ và f(t+2π) = f(t) thì $\mathscr{L}$[f(t)] = $\dfrac{1}{1-e^{-2\pi p}}\int_0^{2\pi} e^{-pt}\sin t dt$

C) $\mathscr{L}\left[\int_0^t f(u)du\right] = \dfrac{F(p)}{p}$

D) $\mathscr{L}\left[\int_0^t e^{3u} ch2u du\right] = \dfrac{p-3}{p((p-3)^2-4)}$

**<u>Câu 10</u>** Trong mặt phẳng phức, cho các hàm số $u(x,y) = 6x^2 - 6y^2 + 5y + 2$, $v = 12xy - 5x + 2$. Khẳng định nào sau đây **đúng?**

A) u điều hòa, v không điều hòa.
B) u, v là các hàm điều hòa liên hợp.
C) u, v điều hòa nhưng không là các hàm điều hòa liên hợp.
D) v điều hòa, u không điều hòa

## PHẦN TỰ LUẬN (5,0 điểm)

***Câu 11*** (1 *điểm*) Khai triển Laurent hàm $f(z)=(z+i)^2 e^{\frac{1}{z+i}}$ quanh điểm bất thường cô lập $z=-i$. Phân loại điểm bất thường cô lập $z=-i$. Tính tích phân $I=\oint\limits_{|z-3i|=9}(z+i)^2 e^{\frac{1}{z+i}}dz$.

***Câu 12*** (2 *điểm*) Áp dụng phép biến đổi Laplace giải phương trình tích phân

$$y(t)= 3+e^{-5t}-5\int_0^t y(u)\cos 2(t-u)du$$

Tính $\lim\limits_{t\to+\infty} y(t)$ rồi dựa vào kết quả đó xác định giá trị (gần đúng) của $y(t)$ sau khoảng thời gian $t$ đủ lớn.

***Câu 13*** (2 *điểm*)

a) Áp dụng phép biến đổi Laplace giải phương trình vi phân

$$y''+7y'+6y=1+\sin 3t \text{ với điều kiện } y(0)=0 \text{ và } y'(0)=0$$

b) Chứng tỏ rằng sau khoảng thời gian $t$ đủ lớn nghiệm của phương trình vi phân, $y(t)$, biểu diễn xấp xỉ một dao động điều hòa theo thời gian $t$. Xác định vị trí cân bằng và biên độ dao động này.

---

**Ghi chú :** *Cán bộ coi thi không được giải thích đề thi.*

**CHUẨN ĐẦU RA**

| Nội dung kiểm tra | Chuẩn đầu ra của học phần (về kiến thức) |
|---|---|
| Từ câu 1 đến câu 10 | G1: 1.1, 1.2<br>G2: 2.1.1, 2.1.2, 2.1.3, 2.1.4 , 2.4.3 |
| Câu 11: Khai triển được chuỗi Laurent, tính được thặng dư và áp dụng tính tích phân.<br>Câu 12, Câu 13: Áp dụng phép biến đổi Laplace giải phương trình vi phân rồi ứng dụng vào đời sống. | G1: 1.1, 1.2<br>G2: 2.1.3, 2.1.3, 2.1.4 , 2.4.3 |

Ngày 19 tháng 12 năm 2016
Thông qua Bộ môn Toán

<table>
<tr><td colspan="2">TRƯỜNG ĐH SƯ PHẠM KỸ THUẬT TP.HCM<br>BỘ MÔN TOÁN<br>THI CUỐI KỲ HỌC KỲ I NĂM HỌC 2016-2017<br>MÔN: HÀM BIẾN PHỨC VÀ PHÉP BIẾN ĐỔI LAPLACE<br>Mã đề: 0011-0010-1100-2016-2112-0402</td><td rowspan="3">Họ, tên sinh viên: ......................................<br>Mã số sinh viên:................................<br>Số báo danh (STT):........ Phòng thi: ....<br>Thời gian : 90 phút (21/12/2016)<br>Lưu ý: Sinh viên làm bài thi lần lượt trên trang 6, 5, 4,3. Đối với các hệ phương trình đại số tuyến tính thì chỉ cần ghi kết quả vào bài làm mà không cần trình bày cách giải.<br>Sinh viên nộp lại đề thi cùng với bài làm.</td></tr>
<tr><td>Giám thị 1</td><td>Giám thị 2</td></tr>
<tr><td>Giáo viên chấm thi 1&2</td><td>ĐIỂM</td></tr>
</table>

## BÀI LÀM PHẦN TRẮC NGHIỆM

| Câu hỏi | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Trả lời | | | | | | | | | | |

## BÀI LÀM PHẦN TỰ LUẬN

Trường ĐH Sư phạm Kỹ thuật Tp.HCM
KHOA KHOA HỌC ỨNG DỤNG
BỘ MÔN TOÁN

**ĐỀ THI CUỐI KỲ** ***HỌC KỲ I NĂM HỌC 2016-2017***
**MÔN**: ***HÀM BIẾN PHỨC VÀ PHÉP BIẾN ĐỔI LAPLACE***
Mã môn học: **MATH 121201** *Thời gian* : 90 phút (21/12/2016)
Đề thi gồm 3 trang ***Được phép sử dụng tài liệu***
Mã đề: 0100-0010-1100-2016-2112-0402 (**Nộp lại đề này**)

# PHẦN TRẮC NGHIỆM LỰA CHỌN (5,0 điểm)

**(Chọn 1 trong các câu A, B, C, D rồi điền vào *BÀI LÀM PHẦN TRẮC NGHIỆM* ở trang 6)**

**Câu 1** Trong mặt phẳng phức, cho các hàm số $u(x,y)=6x^2-6y^2+5y+2$, $v=12xy-5x+2$. Khẳng định nào sau đây **đúng?**

A) v điều hòa, u không điều hòa.
B) u, v là các hàm điều hòa liên hợp.
C) u điều hòa, v không điều hòa.
D) u, v điều hòa nhưng không là các hàm điều hòa liên hợp.

**Câu 2** Khẳng định nào sau đây **sai?**

**A)** Nếu hàm u(x,y) và v(x,y) điều hòa và thỏa điều kiện (C-R) trên hình tròn mở $D=\{z:|z+3i|<9\}$ thì hàm $f(z)$ = u(x,y) + iv(x,y) giải tích trên $D$.
**B)** Nếu hàm phức $f(z)$ = u(x,y) + iv(x,y) không khả vi trên miền D thì các hàm u(x,y) và v(x,y) không thỏa điều kiện Cauchy – Reimann trên miền D
**C)** Hàm phức $f(z)$ = u(x,y) + iv(x,y) liên tục trên miền D khi và chỉ khi các hàm u(x,y), v(x,y) liên tục trên miền D.
**D)** Nếu hàm v(x,y) không điều hòa trên miền D thì f(z) = u(x,y)+iv(x,y) không giải tích trên D.

***Câu 3*** Cho số phức z = $\frac{5}{2+i}+i^9+e^{-8i}$. Khi đó:

A) Rez = 2 + cos8, Imz = -sin8
B) Rez = 10 + cos8, Imz = sin8
C) Rez = 2 + cos8, Imz = sin8
D) Rez = 2+ cos8, Imz = -2 – sin8

***Câu 4*** Cho phương trình vi phân: $y'-3y = u(t-2\pi)e^{5(t-2\pi)}$ (1) với điều kiện ban đầu y(0) = 4.
Để giải phương trình vi phân này ta làm như sau: Đặt Y = Y(p)= $\mathscr{L}$[y(t)]

- Biến đổi Laplace hai vế phương trình (1 ) ta được: $pY-3Y = \dfrac{e^{-2\pi p}}{p-5}+4$ (2)
- Giải phương trình (2) với Y là ẩn ta được : Y= $\dfrac{e^{-2\pi p}}{(p-3)(p-5)}+\dfrac{4}{p-3}$ (3)
- Phân tích vế phải của (3) thành phân thức đơn giản ta được: Y = $\dfrac{1}{2}e^{-2\pi p}\left(\dfrac{1}{p-5}-\dfrac{1}{p-3}\right)+\dfrac{4}{p-3}$
- Biến đổi Laplace ngược hai vế ta được nghiệm: y = $\dfrac{1}{2}\left(e^{3(t-2\pi)}-e^{5(t-2\pi)}\right)u(t-2\pi)+4e^{3t}$

A) Cách làm sai, tính toán sai, kết quả sai.
B)Cách làm sai, tính toán đúng, kết quả sai.
C) Cách làm đúng, tính toán đúng, kết quả đúng.
D)Cách làm đúng, tính toán sai, kết quả sai.

***Câu 5*** Hàm phức f(z) = $\frac{6}{z}+\frac{\bar{z}}{|z|^2}$ = u + iv có phần thực và phần ảo là:

A) u = $\dfrac{7x}{x^2+y^2}$, v = $\dfrac{7y}{x^2+y^2}$
B) u = $\dfrac{5x}{x^2+y^2}$, v = $\dfrac{-5y}{x^2+y^2}$
C) u = $\dfrac{7x}{x^2+y^2}$, v = $\dfrac{-7y}{x^2+y^2}$
D) một kết quả khác

**Câu 6** Ảnh của đường thẳng y = 0 qua phép biến hình w = $e^{3-iz}$ = u +iv là

A) Đường tròn $u^2 + v^2 = e^6$ B) Đường thẳng v = 0.
C) Đường tròn $u^2 + v^2 = e^3$ D) Đường thẳng u = 0.

**<u>Câu 7</u>** Giả sử $\mathscr{L}[f(t)] = F(p)$. Khẳng định nào sau đây **sai?**

A)Nếu f(t) là hàm gốc tuần hoàn với chu kỳ **T** thì $\mathscr{L}[f(t)] = \dfrac{1}{1-e^{-Tp}}\int_0^T e^{-pt} f(t)dt$

B)Nếu $f(t) = \begin{cases} \sin t & khi \quad 0 < t < \pi \\ 0 & khi \quad \pi < t < 2\pi \end{cases}$ và f(t+2π) = f(t) thì $\mathscr{L}[f(t)] = \dfrac{1}{1-e^{-2\pi p}}\int_0^{2\pi} e^{-pt}\sin t dt$

C) $\mathscr{L}\left[\int_0^t f(u)du\right] = \dfrac{F(p)}{p}$ D) $\mathscr{L}\left[\int_0^t e^{3u} ch2u du\right] = \dfrac{p-3}{p((p-3)^2-4)}$

**<u>Câu 8</u>** Trong mặt phẳng phức cho các tập hợp điểm $E = \{z : |z+2-i| = |z+6i|\}$, $F = \{z : |z+1-5i| \le 6\}$. *Khẳng định nào sau đây sai?*

A) Tập E không bị chặn.
B) Tập F là là tập compact.
C) Tập F là hình tròn đóng tâm -1+5i bán kính bằng 6.
D) Tập E là đường trung trực của đoạn thẳng nối 2 -i với 6i.

***<u>Câu 9</u>*** Khẳng định nào sau đây sai?

A) Nếu a là điểm bất thường cô lập của hàm f(z) và $\lim\limits_{z\to a} f(z) = \infty$, $\lim\limits_{z\to a}(z-a)^m f(z) = A$ (với $0 \ne A \ne \infty$) thì a là cực điểm cấp m của hàm f(z).

B) $z = 3$ là cực điểm cấp 2 của hàm $f(z) = \dfrac{e^z + 12z}{(z-3)^2}$

C) $\oint\limits_{|z-2|=4} \dfrac{e^z + 12z}{(z-3)^2}dz = 2\pi i(e^3+12)$ D) $\oint\limits_{|z+4i|=3} \dfrac{e^z + 12z}{(z-3)^2}dz = 2\pi i \operatorname{Res}\left[\dfrac{e^z + 12z}{(z-3)^2}, 3\right]$

***<u>Câu 10</u>*** Để giải hệ phương trình vi phân: $\begin{cases} x' - 3y = 0 \\ x + y' - 4y = 1 \end{cases}$, với điều kiện x(0)= y(0)= 0 ta làm như sau:

- Đặt $X = \mathscr{L}[x], Y = \mathscr{L}[y]$ và biến đổi Laplace hai vế ta được: $\begin{cases} XP - 3Y = 0 \\ X + (P-4)Y = \dfrac{1}{p} \end{cases}$
- Giải hệ phương trình với X, Y là ẩn ta được $\begin{cases} X = \dfrac{3}{p(p-1)(p-3)} \\ Y = \dfrac{1}{(p-1)(p-3)} \end{cases}$
- Phân tích thành các phân thức đơn giản ta được $\begin{cases} X = \dfrac{A}{p} + \dfrac{B}{P-1} + \dfrac{C}{P-3} \\ Y = \dfrac{D}{P-1} + \dfrac{E}{P-3} \end{cases}$ với A, B, C, D, E là các hằng số mà ở đây ta không tìm.
- Biến đổi Laplace ngược hai vế ta được nghiệm $\begin{cases} x = A + Be^t + Ce^{3t} \\ y = De^t + Ee^{3t} \end{cases}$

Khẳng định nào sau đây đúng?

**A)** Cách làm đúng, tính toán đúng, kết quả đúng.
**B)** Cách làm đúng, tính toán sai, kết quả đúng.
**C)** Cách làm sai, tính toán sai, kết quả sai.
**D)** Cách làm đúng, tính toán sai, kết quả sai.

## PHẦN TỰ LUẬN (5,0 điểm)

***Câu 11*** (1 *điểm*) Khai triển Laurent hàm $f(z) = (z+i)^2 e^{\frac{1}{z+i}}$ quanh điểm bất thường cô lập $z = -i$. Phân loại điểm bất thường cô lập $z = -i$. Tính tích phân $I = \oint\limits_{|z-3i|=9} (z+i)^2 e^{\frac{1}{z+i}} dz$.

***Câu 12*** (2 *điểm*) Áp dụng phép biến đổi Laplace giải phương trình tích phân

$$y(t) = 3 + e^{-5t} - 5\int_0^t y(u)\cos 2(t-u)\,du$$

Tính $\lim\limits_{t\to+\infty} y(t)$ rồi dựa vào kết quả đó xác định giá trị (gần đúng) của $y(t)$ sau khoảng thời gian $t$ đủ lớn.

***Câu 13*** (2 *điểm*)

a) Áp dụng phép biến đổi Laplace giải phương trình vi phân

$$y'' + 7y' + 6y = 1 + \sin 3t \text{ với điều kiện } y(0) = 0 \text{ và } y'(0) = 0$$

b) Chứng tỏ rằng sau khoảng thời gian $t$ đủ lớn nghiệm của phương trình vi phân, $y(t)$, biểu diễn xấp xỉ một dao động điều hòa theo thời gian $t$. Xác định vị trí cân bằng và biên độ dao động này.

---

**Ghi chú :** *Cán bộ coi thi không được giải thích đề thi.*

**CHUẨN ĐẦU RA**

| Nội dung kiểm tra | Chuẩn đầu ra của học phần (về kiến thức) |
|---|---|
| Từ câu 1 đến câu 10 | G1: 1.1, 1.2<br>G2: 2.1.1, 2.1.2, 2.1.3, 2.1.4 , 2.4.3 |
| Câu 11: Khai triển được chuỗi Laurent, tính được thặng dư và áp dụng tính tích phân.<br>Câu 12, Câu 13: Áp dụng phép biến đổi Laplace giải phương trình vi phân rồi ứng dụng vào đời sống. | G1: 1.1, 1.2<br>G2: 2.1.3, 2.1.3, 2.1.4 , 2.4.3 |

Ngày 19 tháng 12 năm 2016

Thông qua Bộ môn Toán

<table>
<tr><td colspan="2">TRƯỜNG ĐH SƯ PHẠM KỸ THUẬT TP.HCM<br>BỘ MÔN TOÁN<br>THI CUỐI KỲ HỌC KỲ I NĂM HỌC 2016-2017<br>MÔN: HÀM BIẾN PHỨC VÀ PHÉP BIẾN ĐỔI LAPLACE<br>Mã đề: 0100-0010-1100-2016-2112-0402</td><td rowspan="3">Họ, tên sinh viên: .....................................<br>Mã số sinh viên:...............................<br>Số báo danh (STT):........ Phòng thi: ....<br>Thời gian : 90 phút (21/12/2016)<br>Lưu ý: Sinh viên làm bài thi lần lượt trên trang 6, 5, 4,3. Đối với các hệ phương trình đại số tuyến tính thì chỉ cần ghi kết quả vào bài làm mà không cần trình bày cách giải.<br>Sinh viên nộp lại đề thi cùng với bài làm.</td></tr>
<tr><td>Giám thị 1</td><td>Giám thị 2</td></tr>
<tr><td>Giáo viên chấm thi 1&2</td><td>ĐIỂM</td></tr>
</table>

## BÀI LÀM PHẦN TRẮC NGHIỆM

| Câu hỏi | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Trả lời | | | | | | | | | | |

## BÀI LÀM PHẦN TỰ LUẬN

*ĐÁP ÁN MÔN*

**HÀM BIẾN PHỨC VÀ PHÉP BIẾN ĐỔI LAPLACE**

(Ngày thi**: 21**/12/2016)

## PHẦN TRẮC NGHIỆM

***Mã đề:*** 0001-0010-1100-2016-2112-0402

| **Câu hỏi** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** | **9** | **10** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Trả lời** | **A** | **B** | **A** | **D** | **C** | **D** | **A** | **B** | **B** | **D** |

Mã đề: 0010-0010-1100-2016-2112-0402

| **Câu hỏi** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** | **9** | **10** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Trả lời** | **B** | **D** | **C** | **A** | **B** | **A** | **D** | **D** | **A** | **B** |

Mã đề: 0011-0010-1100-2016-2112-0402

| **Câu hỏi** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** | **9** | **10** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Trả lời** | **C** | **D** | **A** | **B** | **A** | **D** | **D** | **A** | **B** | **B** |

Mã đề: 0100-0010-1100-2016-2112-0402

| **Câu hỏi** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** | **9** | **10** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Trả lời** | **B** | **B** | **A** | **D** | **C** | **A** | **B** | **D** | **D** | **A** |

## BÀI LÀM PHẦN TỰ LUẬN

| ***Câu hỏi*** | **Nội dung** | ***Điểm*** |
|---|---|---|
| **Câu 11** | | **1 điểm** |
| | Khai triển Laurent<br>Ta có: $e^{\frac{1}{z+i}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{1}{z+i}\right)^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!(z+i)^n}$<br>$f(z)=(z+)^2e^{\frac{1}{z+i}}=(z+i)^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!(z+i)^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!(z+i)^{n-2}}$ | 0,25đ |

$$= \underbrace{(z+i)^2 + \frac{z+i}{1} + \frac{1}{2!}}_{\text{Phần đều}} + \underbrace{\frac{1}{3!(z+i)} + \frac{1}{4!(z+i)^2} + \dots}_{\text{Phần chính}}$$ 0,25đ

Vì phần chính có vô số số hạng nên $z=-i$ là điểm bất thường cốt yếu.

Tính tích phân: Vì hàm số $f(z)=(z+i)^2 e^{\frac{1}{z+i}}$ giải tích trên $\mathbb{C}\backslash\{-i\}$ và đường tròn $|z-3i|=9$ bao quanh điểm bất thường cô lập $z=-i$ nên áp dụng thặng dư ta được 0,25đ

$$I = \oint_{|z-3i|=9} (z+i)^2 e^{\frac{1}{z+i}} dz = 2\pi i \operatorname{Res}[(z+i)^2 e^{\frac{1}{z+i}}, -i] = 2\pi i \frac{1}{3!} = \frac{\pi i}{3}$$ 0,25đ

## Câu 12 — 2đ

Áp dụng tích chập, phương trình được viết lại

$$y(t) = 3 + e^{-5t} - 5y(t) * \cos 2t$$

Đặt Y = Y(p) = $\mathscr{L}$[y(t)] biến đổi Laplace hai vế phương trình, áp dụng tính chất tuyến tính và định lý Borel ta được

$$Y = \frac{3}{p} + \frac{1}{p+5} - 5\mathscr{L}[y(t)]\,\mathscr{L}[\cos 2t]$$

$$\Leftrightarrow Y = \frac{3}{p} + \frac{1}{p+5} - 5Y\frac{p}{p^2+4}$$ **0.5đ**

Giải phương trình với Y là ẩn ta được **0.5đ**

$$Y = \frac{(4p+15)(p^2+4)}{p(p+5)(p+1)(p+4)} \overset{(*)}{=} \frac{A}{p} + \frac{B}{p+5} + \frac{C}{p+1} + \frac{D}{p+4}$$

Biến đổi Laplace ngược hai vế ta được nghiệm

$$y(t) = \mathscr{L}^{-1}[Y] = \mathscr{L}^{-1}[A\frac{1}{p} + B\frac{1}{p+5} + C\frac{1}{p+1} + D\frac{1}{p+4}]$$

$$\Leftrightarrow y(t) = A + Be^{-5t} + Ce^{-t} + De^{-4t}$$ **0.75đ**

$\lim\limits_{t\to+\infty} y(t) = \lim\limits_{t\to+\infty}(A + Be^{-5t} + Ce^{-1t} + De^{-94}) = A = 3$ (tính A bên dưới) nên sau khoảng thời gian t đủ lớn $y(t) \approx 3$.

Tìm $A, B, C, D$ dựa vào đẳng thức (*) **0.25đ**

$$\frac{(4p+15)(p^2+4)}{p(p+5)(p+1)(p+4)} \overset{(*)}{=} \frac{A}{p} + \frac{B}{p+5} + \frac{C}{p+1} + \frac{D}{p+4}$$

$A = 3$, $B = \frac{29}{4}$, $C = -\frac{55}{12}$, $D = -\frac{5}{3}$

Vậy nghiệm phương trình tích phân là $y(t) = 3 + \frac{29}{4}e^{-5t} - \frac{55}{12}e^{-t} - \frac{5}{3}e^{-4t}$

**Câu 13** **1,5đ**

Đặt $Y = Y(p) = \mathscr{L}[y(t)]$. Biến đổi Laplace hai vế phương trình, áp dụng tính chất tuyến tính và tính chất đạo hàm hàm gốc ta được:

$$p^2Y - py(0) - y'(0) + 7\big(pY - y(0)\big) + 6Y = \mathscr{L}[1 + \sin 3t]$$ **0.5đ**

$$\Leftrightarrow Y(p^2 + 7p + 6) = \frac{1}{p} + \frac{3}{p^2+9}$$ **0.5đ**

$$\Leftrightarrow Y = \frac{p^2+3p+9}{p(p+1)(p+6)(p^2+9)}$$

Phân tích thành phân thức đơn giản

$$Y = \frac{p^2+3p+9}{p(p+1)(p+6)(p^2+9)} \overset{(*)}{=} \frac{A}{p} + \frac{B}{p+1} + \frac{C}{p+6} + \frac{Dp+3E}{p^2+9}$$

Biếi đổi Laplace ngược hai vế và áp dụng tính chất tuyến tính ta được

$$y(t) = \mathscr{L}^{-1}[Y] = \mathscr{L}^{-1}[A\frac{1}{p} + B\frac{1}{p+1} + C\frac{1}{p+6} + D\frac{p}{p^2+9} + E\frac{3}{p^2+9}]$$

$$\Leftrightarrow y(t) = A + Be^{-t} + Ce^{-6t} + D\cos 3t + E\sin 3t$$

**0.5đ**

Tìm $A, B, C, D$ dựa vào đẳng thức:

$$\frac{p^2+3p+9}{p(p+1)(p+6)(p^2+9)} \overset{(*)}{=} \frac{A}{p} + \frac{B}{p+1} + \frac{C}{p+6} + \frac{Dp+3E}{p^2+9}$$

$$A = \frac{0^2+3\times 0+9}{(0+1)(0+6)(0^2+9)} = \frac{1}{6},\quad B = \frac{(-1)^2+3\times(-1)+9}{(-1)(-1+6)((-1)^2+9)} = -\frac{7}{50}$$

$$C = \frac{(-6)^2+3\times(-6)+9}{(-6)(-6+1)((-6)^2+9)} = \frac{1}{50}$$

Từ đẳng thức (*)

$$\begin{cases} Cho \quad p=1: & \dfrac{13}{140} = \dfrac{A}{1} + \dfrac{B}{1+1} + \dfrac{C}{1+6} + \dfrac{D+3E}{1^2+9} \\ Cho \quad p=-2: & \dfrac{7}{104} = \dfrac{A}{-2} + \dfrac{B}{-2+1} + \dfrac{C}{-2+6} + \dfrac{-2D+3E}{(-2)^2+9} \end{cases}$$

Thay $A = \frac{1}{6}, B = -\frac{7}{50}, C = \frac{1}{50}$ vào hệ trên rồi giải tìm $D, E$ ta được

$$D = -\frac{7}{150}, E = -\frac{1}{150}$$

Vậy nghiệm phương trình vi phân là $y(t) = \frac{1}{6} - \frac{7}{150}e^{-t} + \frac{1}{50}e^{-6t} - \frac{7}{150}\cos 3t - \frac{1}{150}\sin 3t$

| | | |
|---|---|---|
| | **b) Vì** $\lim\limits_{t\to+\infty}(-\frac{7}{150}e^{-t}+\frac{1}{50}e^{-6t})=0$ nên sau khoảng thời gian t đủ lớn thì nghiệm phương trình vi phân, $y(t)\approx\frac{1}{6}-\frac{7}{150}\cos 3t-\frac{1}{150}\sin 3t$.<br>$y(t)\approx\frac{1}{6}-\frac{7}{150}\cos 3t-\frac{1}{150}\sin 3t=\frac{1}{6}+\frac{\sqrt{2}}{30}(\frac{-7}{5\sqrt{2}}\cos 3t-\frac{1}{5\sqrt{2}}\sin 3t)=\frac{1}{6}+\frac{\sqrt{2}}{30}\sin(3t+\alpha)$<br>(trong đó $\sin\alpha=-\frac{7}{5\sqrt{2}},\cos\alpha=-\frac{1}{5\sqrt{2}}$)<br>Vậy sau khoảng thời gian t đủ lớn thì nghiệm phương trình vi phân, $y(t)$, xấp xỉ dao động điều hòa theo thời gian $t$ có biên độ dao động $\frac{\sqrt{2}}{30}$ quanh điểm cân bằng có tọa độ $y_o=\frac{1}{6}$.<br>..............................................................................................<br>Cách giải tổng quát như sau: $y(t)=A+Be^{-t}+Ce^{-6t}+D\cos 3t+E\sin 3t$<br>**Vì** $\lim\limits_{t\to+\infty}(Be^{-t}+Ce^{-6t})=0$ nên sau khoảng thời gian t đủ lớn thì nghiệm phương trình vi phân<br>$y(t)\approx A+D\cos 3t+E\sin 3t=A+\sqrt{D^2+E^2}(\frac{D}{\sqrt{D^2+E^2}}\cos 3t+\frac{D}{\sqrt{D^2+E^2}}\sin 3t)$<br>Đặt $\sin\alpha=\frac{D}{\sqrt{D^2+E^2}},\cos\alpha=\frac{D}{\sqrt{D^2+E^2}}$<br>$y(t)\approx A+\sqrt{D^2+E^2}(\sin\alpha\cos 3t+\cos\alpha\sin 3t)=A+\sqrt{D^2+E^2}\sin(3t+\alpha)$<br>Vậy sau khoảng thời gian t đủ lớn thì nghiệm phương trình vi phân, $y(t)$, xấp xỉ dao động điều hòa theo thời gian $t$ có biên độ dao động $\sqrt{D^2+E^2}$ quanh điểm cân bằng có tọa độ $y_o=A$. | ***0.5đ*** |

*** HẾT***